ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME XII. **JANVIER 1957.** **N° 47.**

Tome XII — Janvier 1957 — N° 47

ANNALES
DE
RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T. S. F.

COMPAGNIES FRANÇAISES

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL (CSF)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE (SFR)
RADIO-FRANCE (RF)
RADIO-ORIENT (RO)
COMPAGNIE RADIO-MARITIME (CRM)
COMPAGNIE D'APPLICATIONS MÉCANIQUES A L'ÉLECTRONIQUE,
AU CINÉMA ET A L'ATOMISTIQUE (CAMECA)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE-AFRIQUE (SFRA)
SOCIÉTÉ ANONYME LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE (LCC)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES MÉTAUX ÉLECTRONIQUES (CIME)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES CÉRAMIQUES ÉLECTRONIQUES (CICE)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Rédacteur scientifique : **M. Robert WARNECKE**

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F.,
Centre d'Information et de Documentation, 12, rue Carducci, Paris (19e).

UN NOUVEAU TYPE D'ANTENNE DE VEILLE : LE PARABOLOÏDE ÉCLAIRÉ PAR UN GUIDE A FENTES [1].

PAR L. THOUREL,

Département « Radar » du Centre de Recherches Techniques
de la Compagnie Générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *L'auteur montre qu'il est possible de réaliser un diagramme de rayonnement de forme déterminée à partir d'un paraboloïde éclairé par une source linéaire équiphase. La source linéaire peut être constituée par un guide dans lequel est taillé un alignement de fentes série-shunt et deux méthodes de calcul de cet alignement sont exposées : une méthode basée sur l'optique géométrique, qui est suffisante pour les besoins de la pratique et une méthode plus rigoureuse tenant compte des phases, mais d'une mise en œuvre beaucoup plus longue. Les caractéristiques de la source linéaire étant ainsi définies, les méthodes de détermination des fentes et de construction du guide sont indiquées.* (C. D. U. : 621.396.677.71.)

SUMMARY. — *The author shows that it is possible to produce a radiation diagram of a given shape by means of a parabolic aerial illuminated by a constant-phase linear source. The linear source may consist of a waveguide provided with a linear arrangement of series-shunt slots and two methods of calculating this arrangement are given : one method based on geometrical optics, adequate for practical purposes, and a more rigorous method taking phase into account, but much more laborious to compute.*
The characteristics of the linear source being thus defined, the methods for the determination of the slots and for the construction of the waveguide are given. (U. D. C. : 621.396.677.71.)

1. INTRODUCTION.

Dans de nombreuses applications de radar, il est nécessaire que le rayonnement de l'antenne soit réparti, dans le plan vertical, selon une loi bien définie : ainsi les aériens dits de « couverture haute » équipant les radars de veille doivent assurer une répartition de la puissance rayonnée selon une loi en « cosécante carrée ».

La mise en forme du diagramme de rayonnement ne peut être obtenue qu'en agissant sur la distribution d'amplitude et de phase régnant sur l'ouverture équivalente à l'antenne : on sait en effet que cette distribution est liée au diagramme par une transformation de Fourier. Il existe plusieurs moyens pour agir sur cette distribution : soit en imposant une certaine loi à l'illumination primaire (utilisation de plusieurs cornets par exemple), soit en donnant à la surface du réflecteur une forme déterminée, l'illumination primaire étant arbitraire, ce qui permet alors de l'obtenir à partir d'un simple cornet. Cette technique est employée dans le cas des réflecteurs à double courbure [1].

Ce dernier type de réflecteur, bien qu'ayant donné toute satisfaction en ce qui concerne les gains et les diagrammes de rayonnement, présente cependant deux inconvénients qui sont, d'une part le prix de revient élevé et, d'autre part la hauteur d'antenne

(1) Manuscrit reçu le 30 novembre 1956.

nécessaire à l'obtention d'une atténuation déterminée de l'énergie rayonnée dans la direction de l'horizon. Il est en effet indispensable que cette atténuation soit d'au moins 8 à 10 dB si l'on ne veut pas que l'image de l'aérien dans le sol provoque une découpure importante du diagramme en feuilles successives. Dans le cas d'un réflecteur à double courbure, toute la hauteur de celui-ci ne participe pas à la focalisation dans la direction de rayonnement maximum (qui est toujours assez voisine de l'horizon avec une antenne de veille) et tout se passe comme si cette focalisation était obtenue avec un paraboloïde de hauteur inférieure à celle du réflecteur utilisé. C'est une des raisons pour lesquelles les techniciens ont cherché à se servir d'un paraboloïde éclairé par plusieurs cornets.

Cette technique, de son côté, présente des inconvénients plus ou moins graves, à savoir : le poids et la difficulté de construction des cornets d'illumination (il peut y avoir jusqu'à cinq cornets superposés), l'effet d'ombre des cornets, les difficultés d'alimentation de ceux-ci dans une grande bande passante, et, parfois, la quasi-impossibilité de réaliser l'illumination primaire correcte, avec la polarisation désirée [2]. C'est ainsi que la plupart des antennes de veille à cornets multiples rayonnent en polarisation verticale, l'emploi d'une polarisation horizontale conduisant à disposer des cornets qui chevaucheraient les uns sur les autres.

Tous ces inconvénients disparaissent quand on remplace les cornets par une source linéaire verticale, un guide à fentes par exemple. Avec un paraboloïde éclairé par une telle source, la hauteur du réflecteur est réduite au minimum, le prix de revient de celui-ci est diminué puisqu'il s'agit d'une surface de révolution et le poids et l'encombrement de la source primaire sont bien plus faibles qu'avec plusieurs cornets. Le principal inconvénient de ce système, inconvénient qui existe également avec l'antenne à cornets multiples, est l'impossibilité d'assurer une couverture correcte au-delà d'un site de 30°, mais il faut bien reconnaître qu'au-delà de cette valeur, l'opportunité d'une couverture est très discutable.

D'autre part, avec des réflecteurs de dimensions moyennes (jusqu'à 6 m dans la bande S), le niveau des lobes secondaires dans le plan horizontal est difficilement meilleur que 22 dB. Cette situation qui résulte apparemment de l'effet d'ombre du guide, doit s'améliorer avec des réflecteurs de plus grande envergure.

Nous nous proposons ici d'exposer les principes sur lesquel repose le fonctionnement de ce nouveau type d'antenne, les méthodes utilisées pour l'étude du guide à fentes et les résultats obtenus sur une maquette dans la bande S.

2. PRINCIPE DE L'ANTENNE.

2.1. **Structure.**

La structure générale de l'aérien est conforme au schéma de la figure 1, dans lequel (1) est le paraboloïde réflecteur, (2) le guide d'alimentation de la source linéaire, (3) le guide à fentes et (4) la charge adaptée terminant celui-ci. Les fentes utilisées sont du type série-shunt, taillées dans le grand côté du guide : le polarisation est donc horizontale si celui-ci est vertical. L'alignement est placé dans le plan médian du paraboloïde sur la normale à l'axe de révolution élevée à partir du foyer (axe focal). Ce dernier se trouve au début de l'alignement, mais pas nécessairement sur la première fente.

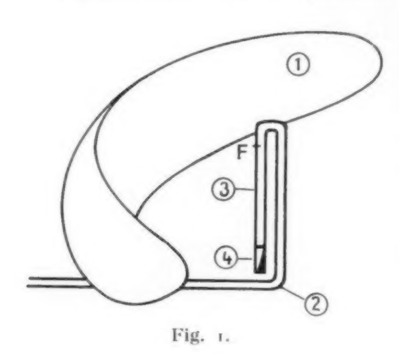


Fig. 1.

On peut montrer qu'avec cette disposition, une source linéaire provoque un rayonnement secondaire formé d'un faisceau de rayons parallèles entre eux et au plan médian vertical. Dans ces conditions, il est donc possible d'obtenir un diagramme de rayonnement très concentré dans le plan normal au plan médian et obéissant à une loi de répartition déterminée dans ce dernier plan.

Le problème à résoudre est le calcul de la distribution en amplitude et en phase le long de la source linéaire pour obtenir un diagramme de rayonnement secondaire imposé.

Nous allons tout d'abord démontrer deux théorèmes relatifs au rayonnement des ouvertures.

2.2. **Théorème.**

Pour obtenir dans un plan donné un diagramme de rayonnement en phase et de forme quelconque, la

distribution sur l'ouverture rayonnante dans le plan considéré est symétrique en amplitude et antisymétrique en phase.

En effet, en appelant $A(x)$ la distribution complexe sur l'ouverture, a la hauteur de celle-ci et $E(\theta)$ le champ à grande distance en fonction de l'angle de site θ, les fonctions $E(\theta)$ et $A(x)$ sont liées par la relation

$$E(\theta) = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} A(x)\, e^{j\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\theta}\, dx \tag{1}$$

à un facteur constant près.

Réciproquement, nous pouvons écrire

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\theta)\, e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\theta}\, d(\sin\theta). \tag{2}$$

La fonction $A(x)$ peut se mettre sous la forme

$$A(x) = R_e[A(x)] - j I_m[A(x)]$$

et, de la relation (2) on tire

$$\begin{aligned} R_e[A(x)] - j I_m[A(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(\theta)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\theta\right) \\ &\quad - j\int_{-\infty}^{+\infty} E(\theta)\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\theta\right) d(\sin\theta). \end{aligned} \tag{3}$$

La première intégrale, qui correspond à la partie réelle de $A(x)$ contient un facteur en $\cos mx$: elle ne change pas de signe quand on change x en $-x$; par contre la deuxième intégrale contenant un facteur en $\sin mx$ change de signe.

Par conséquent

$$R_e[A(x)] = R_e[A(-x)]$$

et

$$I_m[A(x)] = -I_m[A(-x)].$$

La distribution le long de l'ouverture est donc symétrique en module et antisymétrique en phase.

Cette loi est tout à fait générale puisque nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme du diagramme. Le diagramme en fuseau (pencil-beam) est un cas particulier où la phase est constante sur l'ouverture : mais une droite parallèle à l'axe des x est aussi bien une fonction impaire. D'ailleurs dès que le faisceau s'incline (scanning), la répartition de la phase est bien antisymétrique, la courbe idéale étant une droite passant par l'origine.

2.3. **Théorème**.

Ce théorème qui est à la base du calcul de la source a été démontré par M. Herscovici.

Quand un paraboloïde de révolution est éclairé par une source linéaire équiphase, la distribution sur l'ouverture équivalente au réflecteur est symétrique en module et antisymétrique en phase.

Nous admettrons pour le moment que la source est localisée en O qui est aussi son centre de phase.

Soit $I(\Phi)$ l'amplitude complexe du champ rayonné, dans la direction du rayon vecteur OM, de longueur ρ, par la source primaire.

Nous admettrons pour le moment que la source est localisée en O qui est aussi son centre de phase.

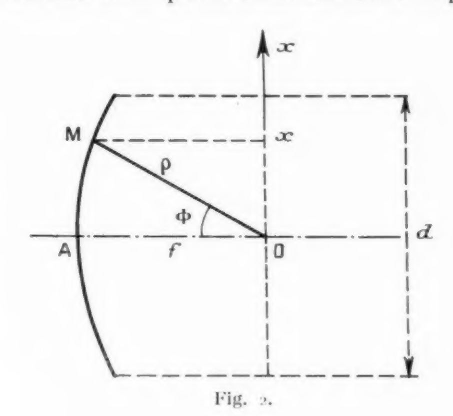


Fig. 2.

Soit $A(x)$ le champ complexe en un point x de l'ouverture. Entre $A(x)$ et $I(\Phi)$ nous savons que nous avons

$$\frac{I(\Phi)}{\rho} = A(x). \tag{4}$$

Mais

$$x = \rho\sin\Phi \tag{5}$$

et l'équation du paraboloïde donne d'autre part

$$x\,2f = \rho(1+\cos\Phi). \tag{6}$$

La combinaison de (5) et de (6) conduit à

$$x = 2f\,\mathrm{tg}\,\frac{\Phi}{2} \tag{7}$$

ou encore à

$$\rho = f\left(1+\frac{x^2}{4f^2}\right). \tag{8}$$

Cette valeur, portée dans (4) entraîne une relation entre $I(\Phi)$ et $A(x)$ qui ne contient plus ρ :

$$I(\Phi) = f\left(1+\frac{x^2}{4f^2}\right)A(x). \tag{9}$$

Cette dernière relation permet de calculer $I(\Phi)$ connaissant $A(x)$.

Considérons maintenant une source linéaire dont le diagramme de rayonnement est $I(\Phi)$. Soit $B(y)$

la distribution complexe sur la source. D'après la relation (2) nous savons que nous devrons avoir

$$(10) \qquad B(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\Phi)\, e^{-j\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\Phi}\, d(\sin\Phi),$$

$$(11) \qquad d(\sin\Phi) = \cos\Phi\, d\Phi$$

et l'on peut montrer à partir de la relation (7) que

$$(12) \qquad dx = \rho\, d\Phi,$$

ce qui conduit à

$$(13) \qquad d\Phi = \frac{dx}{f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)}$$

en utilisant la relation (8).

Donc

$$(14) \qquad d(\sin\Phi) = \frac{\cos\Phi\, dx}{f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)}.$$

Ceci porté dans l'équation (10) donne en tenant compte de la formule (9)

$$(15) \qquad B(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)\, f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)}{f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)}\, e^{-j\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\Phi} \cos\Phi\, dx.$$

Mais la figure montre que

$$\cos\Phi = \frac{1 - \frac{x^2}{4f^2}}{1 + \frac{x^2}{4f^2}},$$

soit, si $x \leq \frac{f}{2}$:

$$\cos\Phi = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)^2}.$$

Cette expression portée dans (15) conduit à

$$(16) \qquad B(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)}{\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)^2}\, e^{-j\frac{2\pi y}{\lambda}\sin\Phi}\, dx.$$

Mais

$$\sin\Phi = \frac{x}{f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)}.$$

Ce qui donne en définitive, en remarquant que x est limitée à $\pm\frac{a}{2}$:

$$(17) \qquad \boxed{B(y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{A(x)}{\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)^2}\, e^{-j\frac{2\pi y}{\lambda}\frac{x}{f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)}}\, dx.}$$

Cette expression permet de calculer $B(y)$ connaissant $A(x)$. Nous allons voir maintenant que $B(y)$ est équiphase. Posons, pour simplifier l'écriture

$$(18) \qquad \alpha = \frac{2\pi y}{\lambda}\,\frac{1}{f\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \gamma^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{4f^2}\right)^2},$$

L'expression (17) peut également s'écrire

$$B(y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 A(x) \cos\alpha x\, dx - j\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 A(x) \sin\alpha x\, dx,$$

soit

$$\begin{aligned} B(y) = & \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 R_e[A(x)] \cos\alpha x\, dx \\ & - j\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 I_m[A(x)] \cos\alpha x\, dx \\ & - j\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 R_e[A(x)] \sin\alpha x\, dx \\ & - \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 I_m[A(x)] \sin\alpha x\, dx. \end{aligned}$$

Mais d'après le théorème 1, $R_e[A(x)]$ est une fonction paire tandis que $I_m[A(x)]$ est une fonction impaire. Donc

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 R_e[A(x)] \cos\alpha x\, dx = 2\int_{0}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 R_e[A(x)] \cos\alpha x\, dx,$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 I_m[A(x)] \sin\alpha x\, dx = 0,$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 R_e[A(x)] \cos\alpha x\, dx = 0,$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 I_m[A(x)] \sin\alpha x\, dx = 2\int_{0}^{+\frac{a}{2}} \gamma^2 I_m[A(x)] \sin\alpha x\, dx.$$

Finalement, $B(y)$ s'écrit

$$(19)\qquad B(y) = 2\left\{ \int_0^{\frac{a}{2}} \gamma^2 R_e[A(x)] \cos \alpha x \, dx - \int_0^{\frac{a}{2}} \gamma^2 I_m[A(x)] \sin \alpha x \, dx \right\}.$$

Cette expression est réelle et la distribution sur la ligne est donc équiphase.

2.4. Nature de la source linéaire.

Du théorème 2 que nous venons de démontrer, il résulte que la source linéaire doit être équiphase, et c'est là un point particulièrement important. Il est en effet relativement facile de construire un guide à fentes tel que toutes celles-ci rayonnent en phase quand elles sont équidistantes, tandis que le problème est beaucoup plus délicat à résoudre quand une certaine variation de phase doit être respectée : C'est une des raisons pour lesquelles nous avons choisi comme réflecteur un paraboloïde et non un cylindre parabolique.

Pour des considérations de bande passante, nous avons utilisé des fentes série-shunt. Il existe évidemment un certain gradient de phase le long du guide quand on s'éloigne de la fréquence pour laquelle la condition d'équiphase est réalisée, mais l'expérience montre que cet effet n'a pas de répercussion sensible sur le diagramme de rayonnement secondaire.

3. CALCUL DE LA SOURCE LINÉAIRE.

3.1. Résultats obtenus.

Le raisonnement employé dans la démonstration du théorème 2 admet que la distribution linéaire $B(y)$ produit un diagramme $I(\Phi)$ qui est un diagramme à l'infini; or ce n'est pas le cas dans l'antenne. Si pour obtenir le diagramme secondaire produit par la distribution sur l'ouverture $A(x)$ nous utilisons la distribution linéaire $B(y)$ calculée par la formule (17), nous devons nous attendre à trouver pratiquement un diagramme de rayonnement de l'antenne différent du diagramme qui a servi de base au calcul. Cet effet est illustré à la figure 3, sur laquelle on a tracé en pointillés le diagramme désiré et en trait plein le diagramme obtenu.

Comme on le voit, les écarts sont sensibles et d'autant plus importants que le site est élevé : à 30°, la différence atteint plus de 5 dB. On pourrait essayer de tenir compte de cet effet en effectuant le calcul à partir d'un diagramme corrigé en conséquence, mais cette méthode présente des aléas car il n'est pas du tout certain que, pour une autre couverture, l'écart eut été de 5 dB au site maximum.

L'explication de cet effet est la suivante : la quasi-totalité de la puissance rayonnée dans un site déterminé est fournie par une certaine fente, celle-ci étant d'autant plus éloignée du foyer que le site est élevé. La défocalisation de la fente se traduit par un élargissement du diagramme de rayonnement correspondant, ce qui entraîne une diminution du gain. On peut démontrer en effet que la

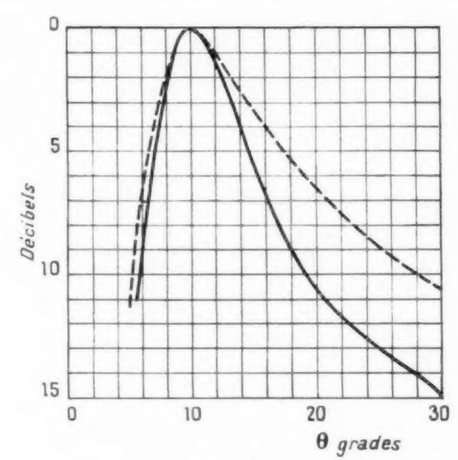


Fig. 3.

normale à l'axe du paraboloïde, élevée au foyer (axe focal), est le lieu des foyers secondaires pour le plan horizontal seulement; pour le plan vertical, ce lieu est un cercle de diamètre AO (*fig.* 2). A cette diminution de gain s'ajoutent également des pertes par « spill-over » qui sont d'autant plus importantes que la fente est excentrée; néanmoins ces pertes restent assez faibles si le contour du réflecteur est découpé en conséquence. Les deux effets se traduisent finalement par une perte d'efficacité de la fente qui est illustrée à la figure 4 (courbe en trait plein).

Cette courbe a été tracée en déplaçant une fente le long de l'axe focal d'un paraboloïde et en relevant, en fonction de la distance x au foyer (*fig.* 2) la perte de gain de l'antenne dans la direction de rayonnement maximum. On a également relevé l'angle de cette direction avec celle de l'axe principal du

paraboloïde : c'est la courbe en pointillés, correspondant à la déviation.

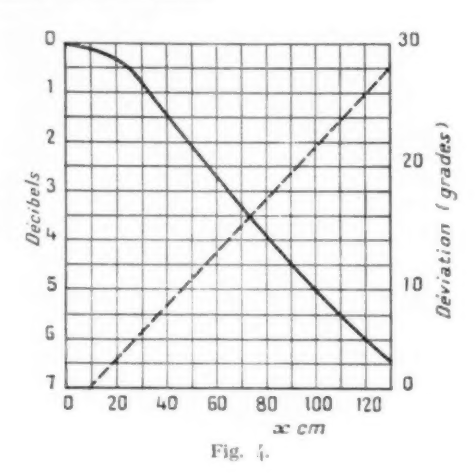


Fig. 4.

3.2. Emploi de l'optique géométrique.

Les résultats que nous venons de mentionner montrent que le théorème 2 permet de prévoir le comportement du système mais ne permet pas un calcul précis de la source linéaire. La méthode de calcul exacte, dont nous parlons plus loin, étant très longue, nous avons pensé qu'une méthode basée sur l'optique géométrique donnerait peut-être des résultats suffisamment précis. Cet espoir était basé sur le succès des méthodes de Chu, Silver et Dunbar relatives au calcul des réflecteurs cylindriques et des réflecteurs à double courbure [1].

La méthode utilisée ici est la suivante.

Considérons un paraboloïde éclairé par une ligne à fentes FF' (*fig.* 5) et soit $G(\theta)$ le diagramme de

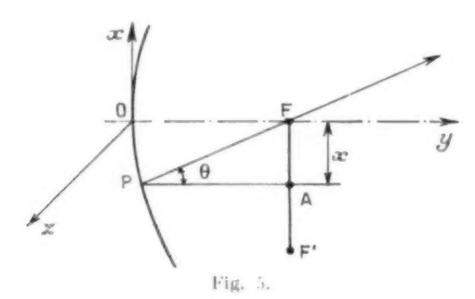


Fig. 5.

rayonnement désiré pour ce paraboloïde, exprimé en gain.

La source linéaire FF' rayonne des ondes sensiblement cylindriques et un rayon AP se réfléchit en P selon une direction PF. Par conséquent, au sens de l'optique géométrique, le rayonnement dans une direction θ est assuré par la source placée en A.

Considérons une tranche de hauteur dz (dz est pris normalement au plan de la feuille); l'énergie rayonnée par une tranche dz de la ligne est, en appelant I_x la puissance rayonnée par A, de la forme

$$I_x\,dx\,dz.$$

Cette énergie est réfléchie dans un secteur d'ouverture $d\theta$ et l'énergie contenue dans ce secteur est de la forme

$$G(\theta)\,dz\,d\theta.$$

En écrivant que ces deux énergies sont égales, nous trouvons

$$I_x\,dx\,dz = k\,G(\theta)\,dz\,d\theta,$$

où k est un facteur de proportionnalité.

Ceci donne

$$I_x = k\,G(\theta)\frac{d\theta}{dx}.$$

Mais

$$x = 2f\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Soit

$$dx = f\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

En portant cette expression dans I_x il vient

$$I_x = k\,G(\theta)\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{f}.$$

Il est donc très facile, connaissant $G(\theta)$, d'en déduire I_x pour le point A de cote

$$x = 2f\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Cependant ce raisonnement suppose que toutes les illuminations I_x sont utilisées de la même manière par le réflecteur; en fait nous savons qu'il n'en est pas ainsi et qu'il existe une certaine perte, donnée par la figure 4. Nous devons donc tenir compte d'une certaine « efficacité d'illumination » de la ligne, η_{ix} et, dans le premier terme de la relation ci-dessus, il faut remplacer I_x par le produit $I_x\eta_{ix}$ ce qui donne

$$I_x\eta_{ix} = \frac{k}{f}\,G(\theta)\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

A partir de cette relation nous avons calculé pour le paraboloïde ayant servi au tracé des figures 3

et 4 le diagramme obtenu par cette méthode optique : si celle-ci est exacte nous devons trouver une courbe se rapprochant de la courbe en trait plein de la figure 3. Cette courbe est tracée en trait pointillé sur la figure 6 où l'on a tracé en trait plein la courbe relevée expérimentalement (courbe de la figure 3). On constate que la concordance avec les résultats expérimentaux, sans être parfaite, est cependant très convenable puisque les écarts n'excèdent pas $\pm$ 1,5 dB.

Il semble donc que l'optique géométrique conduise à une méthode simple de dégrossissage de la ligne.

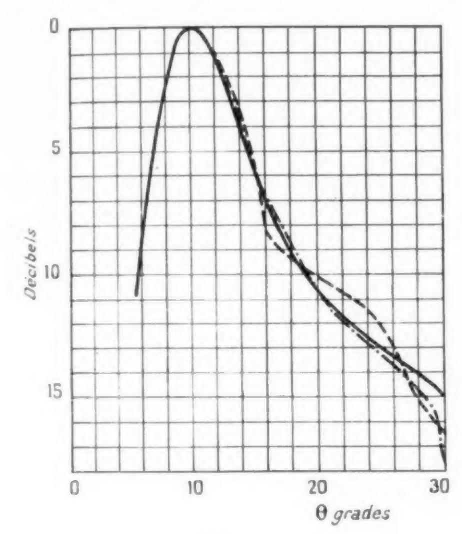


Fig. 6.

3.3. Calcul exact du diagramme.

Cette méthode de calcul utilise la théorie du paraboloïde défocalisé qui a été exposée dans un précédent article [3].

Considérons (*fig.* 7) un paraboloïde de foyer F et soit A le centre de phase de l'une des fentes de la source linéaire. Le point A est sur la normale en F à Ox, il est défini par l'angle α.

La source A contribue au rayonnement du paraboloïde : ce rayonnement est celui de l'ouverture équivalente au réflecteur et découpée dans le plan normal à Ox en F. La contribution de A se traduit par une certaine distribution d'amplitude et de phase sur cette ouverture.

Comme le diagramme de rayonnement dans le plan xOy est le seul qui nous intéresse, le problème peut être traité en considérant uniquement la distribution le long de l'axe focal RR′ : on sait qu'on obtient généralement ainsi une assez bonne approximation. Si nous appelons A_i une source quelconque du guide à fentes, et si nous appelons $E_i(y)$ et $\varphi_i(y)$ les distributions d'amplitude et de phase sur RR′

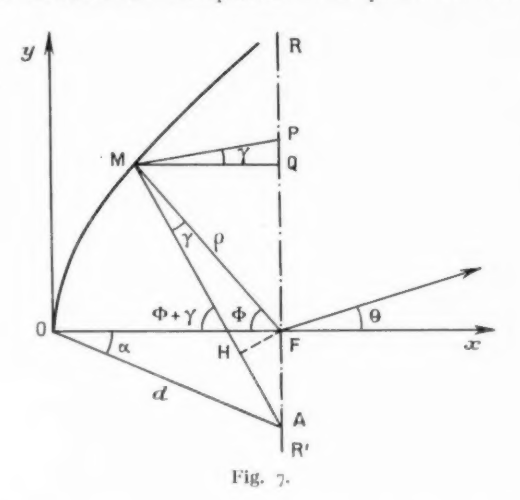


Fig. 7.

correspondant à A_i, la distribution sur RR′ correspondant aux N sources du guide à fentes, sera donnée par

$$\sum_{1}^{N} E_i(y)\, e^{j\varphi_i(y)}.$$

Le calcul de $\varphi_i(y)$ a déjà été effectué par ailleurs [3]. On trouve

$$\varphi_i(y) = \frac{4\pi f}{\lambda}\left[1 - \frac{\cos\Phi}{(1+\cos\Phi)\cos\gamma} - \frac{\sin\Phi - \sin\alpha(1+\cos\Phi)\dfrac{d}{2f}}{(1+\cos\Phi)\sin(\Phi+\gamma)}\right].$$

En remarquant que

$$d = \frac{f}{\cos\alpha},$$

et en posant

$$\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2} = t$$

l'expression de $\varphi_i(y)$ devient sensiblement

$$\varphi_i(y) = \frac{4\pi f}{\lambda}\left[1 - \frac{1-t^2}{2} + (1+t^2)\frac{2t - \operatorname{tg}\alpha}{2\dfrac{y_P}{f}}\right]$$

avec

$$y_P = \mathrm{FP} = f[2t + (1-t^2)\operatorname{tg}\gamma].$$

En prenant la focale comme unité de longueur, on obtient des valeurs « normalisées » de $\varphi(y)$

et y_P, que nous désignons par $\varphi'(y)$ et y'_P, et qui sont valables pour tous les paraboloïdes. Les figures 8 et 9 donnent les valeurs de y'_P et $\varphi'(y)$ ainsi obtenues. Ces courbes sont tracées pour des valeurs de Φ comprises entre $-90°$ et $+90°$, et pour des valeurs de α variant de 5 en 5° entre 0 et 30°. Pour connaître la distribution sur un paraboloïde, il suffit de multiplier y'_P par f pour déterminer FP et de multiplier $\varphi'(y)$ par $\frac{f}{\lambda}$ pour obtenir le déphasage au point P.

La distribution de phase relative à chaque source du guide à fentes pouvant être tracée point par

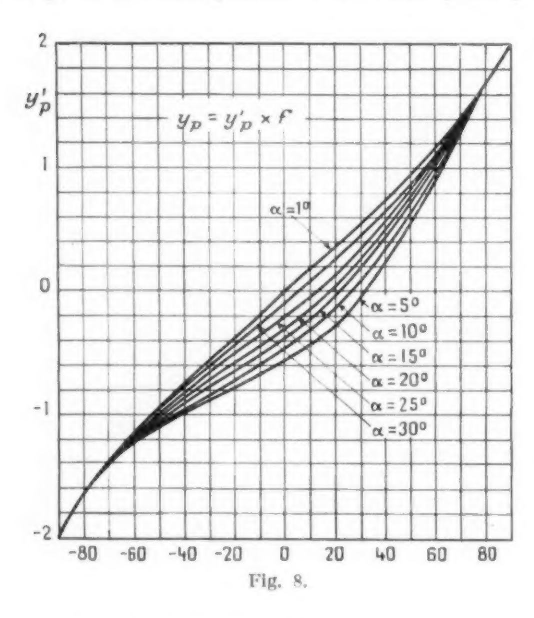


Fig. 8.

point le long de RR′ à partir des figures 8 et 9, il reste à déterminer la distribution d'amplitude. On peut admettre sans faire une erreur considérable que le diagramme d'une source est de la forme

$$e = E_i \cos\Phi,$$

où E_i est l'amplitude maximum du champ rayonné par la source de rang i. Pour choisir E_i, nous devons tenir compte de l'efficacité d'illumination de la source. Cette efficacité peut être déterminée expérimentalement, pour un paraboloïde donné, en traçant la courbe de la figure 4. Si P_i est la puissance relative rayonnée par la fente i dans la source linéaire, la valeur de E_i est, à un facteur près $\sqrt{P_i \eta_{ii}}$ et il vient

$$e = \sqrt{P_i \eta_{ii}} \cos\Phi.$$

Connaissant la distribution en puissance le long du guide à fentes et l'efficacité d'illumination, il est maintenant facile de connaître en tous points de l'axe focal RR′ les distributions d'amplitude et de phase correspondant à chaque fente.

Nous avons effectué ce calcul dans le cas de l'antenne dont le diagramme est tracé figure 6 (trait plein) et, par composition vectorielle des champs le long de RR′ nous avons obtenu la distribution équivalente à l'ensemble des fentes. Une transformation de Fourier, faite graphiquement, nous a donné le diagramme correspondant, qui est tracé en trait mixte sur la figure 6. Jusqu'à un site de 26°,

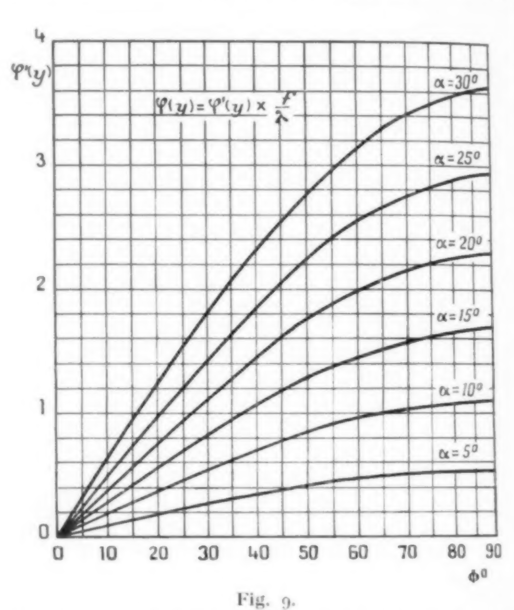


Fig. 9.

Nota. — α et $\varphi'(y)$ sont toujours de signe contraire; pour $\Phi < 0$, $\varphi'(y)$ change de signe.

la concordance entre la courbe ainsi calculée et la courbe relevée expérimentalement est excellente; pour 30°, il apparaît une chute rapide du champ calculé, chute qui atteint plus de 3 dB et qui semble due à l'imprécision du calcul dans cette région.

3.4. Détermination pratique de la ligne.

Nous venons d'exposer deux méthodes pour le calcul des diagrammes : l'une, basée sur l'optique géométrique et donnant les résultats à 1,5 dB près, l'autre, théoriquement plus précise, conduisant à une meilleure approximation aux faibles sites mais devenant imprécise vers le haut des diagrammes.

Pratiquement nous avons toujours utilisé l'optique géométrique pour construire les lignes d'illumination primaire; la ligne ainsi déterminée était mise en place et les diagrammes de rayonnement correspondant du paraboloïde étaient alors tracés. Selon les résultats obtenus, la ligne à fentes était retouchée et deux ou trois modifications ont toujours été suffisantes pour aboutir au diagramme de rayonnement désiré.

Le premier travail à faire, pour un paraboloïde donné, est de tracer les deux courbes de la figure 4 : on connaît ainsi l'efficacité d'illumination d'une fente et la direction dans laquelle elle fournit la quasi-totalité du rayonnement. La fonction $G(\theta)$ étant connue (diagramme à obtenir) il est ainsi possible de connaître les puissances relatives rayonnées par chacune des fentes en appliquant la formule

$$I_x \eta_{1x} = \frac{k}{f} G(\theta) \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

La puissance totale rayonnée par la ligne est alors

$$P_r = \sum_1^N I_x.$$

En convenant que la première fente est celle qui se trouve du côté de l'alimentation de la ligne, la fente 1 rayonne alors la puissance I_1, la fente 2 rayonne la puissance I_2, la fente 3 la puissance I_3, etc. Il existe d'autre part une certaine puissance W_0 dissipée dans la charge d'adaptation de la ligne. Dans ces conditions, le pourcentage de puissance rayonné par la première fente est

$$i_1\,\% = \frac{I_1}{W_0 + \sum_1^N I_x}.$$

et il reste dans le guide une puissance

$$P_{N-1} = W_0 + \left(\sum_1^N I_x \right) - I_1.$$

Le pourcentage de puissance rayonnée par la deuxième fente est

$$i_2\,\% = \frac{I_2}{W_0 + \left(\sum_1^N I_x \right) - I_1}$$

celui rayonné par la troisième fente est

$$i_3\,\% = \frac{I_3}{W_0 + \sum_1^N I_x - (I_1 + I_2)}.$$

Le pourcentage de puissance rayonné par la fente de rang k est

$$i_k\,\% = \frac{I_k}{W_0 + \sum_1^N I_x - \sum_1^{k-1} I_x}.$$

Pour construire le guide à fentes, il faut donc connaître le pourcentage de puissance rayonné par une fente de dimensions déterminées.

4. DÉTERMINATION DES FENTES ET CONSTRUCTION DE LA SOURCE LINÉAIRE.

Le guide d'illumination est un alignement non résonnant de fentes série-shunt. Ce type de fente a été étudié par plusieurs auteurs [1]. Une fente

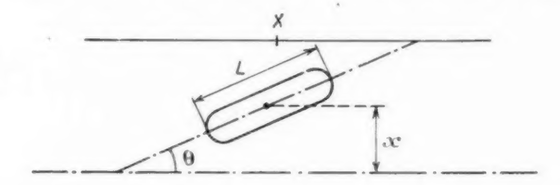


Fig. 10.

est caractérisée par sa longueur L, sa distance à l'axe du guide, x, et son inclinaison sur cet axe, θ (*fig.* 10).

Pour étudier les conditions de résonance d'une fente, un court-circuit mobile est placé au-delà de celle-ci; ce court-circuit est déplacé et, pour chacune de ses positions, on note le T. O. S. dans le guide, en amont de la fente. Pour une certaine fréquence il apparaît un minimum minimorum de ce T. O. S. : cette fréquence est définie comme étant la fréquence de résonance et le T. O. S. doit alors être très voisin de 1 pour une fente série-shunt. On remarquera que cette définition de la résonance est différente de celle de Watson qui la définit par la condition que la susceptance de la fente soit nulle.

Pour que la conductance à la résonance soit égale à l'unité, il faut qu'il existe une certaine relation entre θ et x. Cette relation peut se déterminer expérimentalement par la méthode que nous venons d'indiquer.

On trouve également que la longueur L de résonance varie légèrement avec la distance x, donc

avec θ, pour une fréquence déterminée. Ainsi, avec un guide type 7, la longueur de résonance à 3 000 Mc/s est de 48,6 mm avec $\theta = 10^o$ et $x = 7,5$ mm.

La susceptance présentée par une fente de conductance unité est généralement faible. Elle reste sensiblement égale mais change de signe lorsqu'on passe d'une fente d'inclinaison θ à une fente d'inclinaison $-\theta$, présentant le même taux de couplage

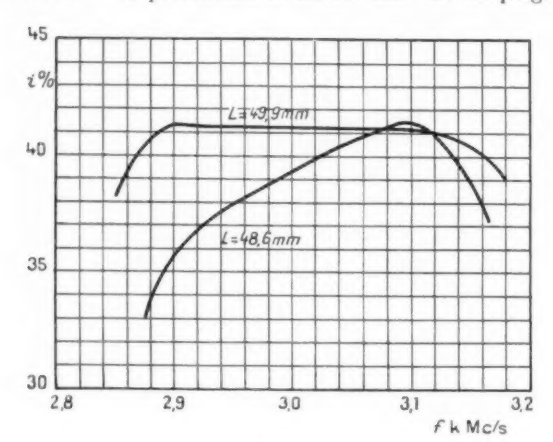


Fig. 11.

au guide. La susceptance est capacitive pour une fente attaquée par l'onde du côté où la fente est la plus voisine de l'axe du guide; pour une telle fente, l'adaptation peut se faire par un iris inductif placé à $\frac{\lambda_g}{4}$ en avant ou en arrière du plan XX' (*fig.* 10). Pour une fente inclinée dans l'autre sens, la susceptance est inductive. Ainsi la fente de la figure 10 présente une susceptance capacitive pour une onde se propageant de gauche à droite dans le guide, et une susceptance inductive pour une onde se propageant de droite à gauche. On notera que les caractéristiques d'une fente ne varient pas quand on passe de θ à $-\theta$ et de x a $-x$.

Le pourcentage de puissance rayonné par une fente est l'une de ses plus importantes caractéristiques puisque c'est celle qu'on utilise pour construire l'alignement. Ce pourcentage peut être simplement mesuré à l'aide d'un ensemble atténuateur, montage cristal et galvanomètre. Il est fonction de x et de θ, ces deux valeurs étant d'ailleurs liées par la condition de conductance unité. Une fente est taillée pour présenter un certain pourcentage de puissance rayonné à la fréquence moyenne de la bande de fonctionnement de l'antenne; quand la fréquence varie, ce pourcentage varie également et il est indispensable que cette variation soit minimum dans la bande. Or si l'on taille la fente exactement à la longueur de résonance pour la fréquence moyenne, on s'aperçoit que la puissance rayonnée varie assez sensiblement. Il est possible d'atténuer ces variations en donnant à la fente une longueur légèrement supérieure à la longueur de résonance. Cet effet est illustré par la figure 11 : pour $L = 49,9$ mm, le pourcentage de puissance rayonné varie de 41,3 à 41,1 % entre 2 900 et 3 100 Mc/s, tandis qu'il varie de 36,2 à 41,1 % pour $L = 48,6$ mm qui est la longueur de résonance à 3 000 Mc/s. Il faut tenir compte de cette remarque pour tailler les fentes afin d'obtenir des diagrammes de rayonnement qui se déforment le moins possible dans la bande.

La largeur de la fente agit assez peu sur sa fréquence de résonance et sur le pourcentage de puissance rayonnée.

Si un guide dans lequel est taillé un alignement de fentes série-shunt est utilisé tel quel pour illuminer un paraboloïde, les diagrammes de rayonnement dans le plan normal à l'axe du guide (plan horizontal dans la pratique) présentent des lobes secondaires assez élevés, de l'ordre de 18 dB. Il est indispensable de prolonger le guide par des flasques parallèles ou divergents et la source linéaire est alors conforme au schéma de la figure 12, dans lequel les flasques sont supposés parallèles. Sur ce schéma (1) est le guide d'ondes sur lequel sont taillées les fentes et (2) sont les flasques

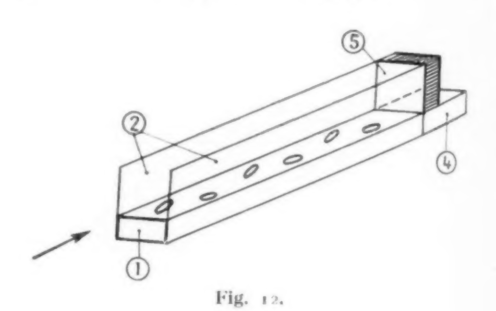


Fig. 12.

L'énergie est amenée dans le guide dans le sens de la flèche et la portion de puissance W_0 qui n'a pas été rayonnée est dissipée dans la charge adaptée (4); la puissance est ici extrêmement faible.

Entre les deux flasques existe une zone d'arrangement des champs rayonnés et une onde de surface coule le long du guide; cette onde se réfléchit sur les fermetures des flasques telles que (5) et, si ces fermetures sont des parois métalliques, un régime station-

naire prend naissance dans la ligne constituée par les deux flasques et perturbe la distribution des champs sur l'ouverture rayonnante. Ceci se traduit par des ondulations des diagrammes de rayonnement du paraboloïde, du côté des sites élevés, dont l'amplitude peut atteindre + 3 dB quand le niveau de rayonnement est de plus de 15 dB au-dessous du niveau de rayonnement maximum. Pour éviter ceci, il est indispensable de constituer la paroi (5) par une charge absorbante; celle-ci peut être formée d'une plaquette de matériau contenant un liant et de la poudre de fer. Quelques millimètres d'épaisseur suffisent. Pour une puissance

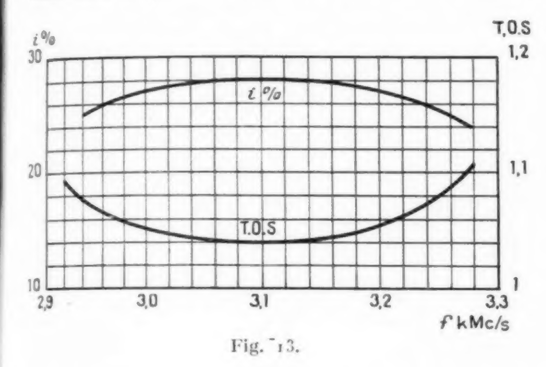


Fig. 13.

dans le guide de 1 MW, l'échauffement de la plaquette provoqué par l'onde de surface est tout à fait acceptable.

La présence des flasques modifie considérablement le comportement des fentes et celles-ci doivent être étudiées sur un guide pourvu des flasques qui équiperont la source définitive. Pour fixer les idées, précisons qu'une fente résonnant sur 3100 Mc/s et taillée dans un guide nu, pour un pourcentage de puissance rayonnée de 27 %, doit avoir une inclinaison $\theta = 16°2$ avec $x = 6,5$ mm et une longueur $L = 48,2$ mm pour que la puissance rayonnée varie peu autour de 3 100 Mc/s. La même fente, taillée sur un guide muni de flasques parallèles de 11 cm de hauteur doit avoir une inclinaison $\theta = 11°$ avec $x=5,5$ mm et une longueur $L=48,8$ mm. La figure 13 donne les variations de puissance rayonnée et de T. O. S. de cette dernière fente entre 2 950 et 3 250 Mc/s.

On voit qu'il est possible de construire une source linéaire fonctionnant sur une largeur de bande de 300 Mc/s dans la bande S.

Quand la puissance de l'émetteur est élevée, des effluves risquent d'apparaître sur les lèvres des fentes : il faut alors pressuriser le système. Le moyen le plus commode consiste à fermer les flasques par une plaque de diélectrique, complexe verre-résine par exemple. Tant que l'épaisseur reste faible $\left(\text{inférieure à } \frac{\lambda}{10}\right)$, la réaction sur les fentes est négligeable. On peut d'ailleurs étudier celles-ci en présence de la plaque de fermeture. Pour une puissance de 1 MW, la tenue à la puissance est satisfaisante avec une pression absolue dans le guide de 1,5 kg/cm².

5. CONCLUSION.

Nous venons d'exposer comment peut être étudiée et construite une antenne formée par un paraboloïde éclairé par un guide à fentes. Nous avons réalisé ainsi un prototype d'aérien qui nous a donné toute satisfaction sur une plage de 200 Mc/s située dans la bande S. Le gain est comparable au gain obtenu avec une antenne utilisant un réflecteur à double courbure et présentant le même diagramme de rayonnement; il semble cependant qu'il lui soit inférieur de 0,25 dB, compte tenu de la précision des mesures de gain. Cette légère perte, qui se traduirait par une diminution de portée de 3 %, est compensée par le fait que la nouvelle antenne utilise un réflecteur de 1,80 m de hauteur alors qu'avec un réflecteur à double courbure il aurait fallu au moins 2,50 m. Les déformations des diagrammes dans la bande sont inférieures à celles qui sont obtenues avec ces aériens double courbure et surtout multi-cornet, et le niveau des lobes secondaires dans le plan horizontal est meilleur que 22 dB. Il semble qu'on puisse espérer atteindre 25 dB avec des réflecteurs de plus grande envergure.

Nous ne voulons pas terminer cet exposé sans remercier la S. E. F. T. qui a bien voulu nous faire confiance au cours de cette étude.

Nous tenons également à remercier ici MM. Cohen, Herscovici et Vincent, du Laboratoire Antenne du Département Radar, pour leur très importante contribution à ce travail.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] SILVER, *Microwave Antenna Theory and Design* (*Coll. M. I. T.*, vol. 12, chap. 12 et 13, Mc Graw Hill Book Co, New-York, 1949).

THOUREL, *Calcul et construction des réflecteurs à double courbure* (*Onde Électrique*, t. 35, décembre 1955).

[2] THOUREL, *Les Antennes*, chap. 13.7, Dunod, Paris, 1956.

[3] THOUREL, *Antennes pour radars de conduite de tir* (*Ann. Radioélect.*, t. 11, n° 45, juillet 1956).

[4] W. H. WATSON, *Resonant slots* (*J. Inst. Elect. Engrs*, vol. 93, Part. III A, n° 4, 1946).

J. B. TRICAUD, *Application de la théorie des réseaux aux guides à fentes non résonnants* (*Onde Électrique*, t. 31, mars 1951).

LES FERRITES (1)

PAR A. VASSILIEV,

Département « Recherches Physico-Chimiques »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

PREMIÈRE PARTIE

SOMMAIRE. — *La première partie de cet article est surtout consacrée au rappel des éléments de la théorie moderne du ferromagnétisme et à une étude sommaire de la théorie du ferrimagnétisme. Dans un article ultérieur, l'auteur étudiera successivement : les propriétés « techniques » des ferrites, les propriétés particulières des principaux groupes de compositions et envisagera quelques cas d'emplois typiques.* (C. D. U. : 621.318.12.)

SUMMARY. — *The first part of this article mainly recalls the elements of modern theory of ferromagnetism and sets out briefly a study of the theory of ferrimagnetism. In a later article, the author will examine in turn the " technical " properties of ferrites, the special properties of the main composition groups and will consider a few typical applications.* (U. D. C. : 621.318.12.)

1. INTRODUCTION.

Bien que les ferrites et certaines de leurs propriétés soient connus depuis fort longtemps [1], leur théorie n'a été découverte que depuis une dizaine d'années, grâce aux travaux de M. Néel [2]. Dès 1940, les applications des ferrites dans le domaine de la radioélectricité ont été envisagées avec beaucoup plus de chances de succès qu'il n'en avait été pour M. Hilpert en 1909 [3], et des recherches ont été orientées vers le développement industriel de ces matériaux [4].

Depuis quelques années, les applications dans le domaine des postes récepteurs de radiodiffusion (« antennes », cadres à barreaux de ferrite) ou de télévision (transformateurs « pour le balayage des lignes ») ont popularisé l'usage de ces matériaux. Des propriétés remarquables de certains produits : ferrites « manganèse-zinc » à très haute perméabilité initiale ($\mu_0 > 1500$) et à haute induction de saturation ($B_s > 4\,000$ gauss), ferrites à cycle d'hystérésis rectangulaire, ferrites à haute résistivité ($\rho > 10^7\ \Omega$/cm), etc. ont donné lieu à des applications remarquables dans les domaines des filtres pour téléphonie, des noyaux pour transformateurs d'impulsions, des dispositifs à mémoire et des ondes centimétriques.

Parallèlement à ces développements, un nombre impressionnant de publications témoigne de l'intérêt scientifique et technique de ces matériaux. Il souligne également le caractère complexe de ce domaine, proche parent de celui des métaux et des alliages ferromagnétiques dont les difficultés propres sont mieux consacrées par leur ancienneté.

On peut proposer une classification des ferrites suivant les caractéristiques spécifiques ou les conditions de leur emploi :

1° Les ferrites utilisés aux champs de faible amplitude, pour circuits accordés de haute qualité.

2° Les ferrites employés aux champs de forte amplitude comme les transformateurs H. F. de

---

(1) Manuscrit reçu le 30 octobre 1956.

puissance, les transformateurs de courants non sinusoïdaux : dents de scie, impulsions, etc.

3° Les ferrites à cycle d'hystérésis rectangulaire utilisés dans les dispositifs à mémoire.

4° Les ferrites utilisés aux ondes centimétriques.

Cette classification suivant l'utilisation nous a paru adaptée au groupement des problèmes particuliers concernant les propriétés des ferrites et intéressant au premier chef les radioélectriciens usagers de ces matériaux.

2. RAPPEL DES ÉLÉMENTS DE BASE DU FERROMAGNÉTISME.

2.1. Généralités.

A la suite de nombreux travaux dont les principaux sont cités par Bozorth [5], on a considéré une pièce en matière ferromagnétique désaimantée comme

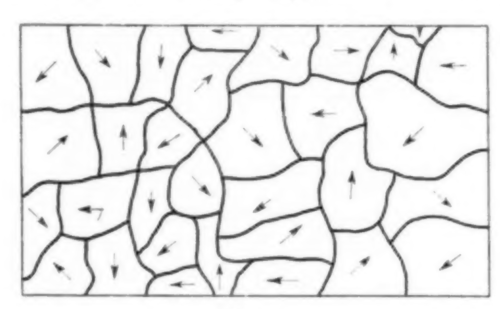


Fig. 1.

étant composée de n volumes élémentaires v_i ou domaines de Weiss, aimantés spontanément à saturation (*fig.* 1).

Les moments magnétiques de ces domaines étant $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{J}_s$ étant l'aimantation à saturation, on a

$$(1)\qquad \frac{\mathbf{m}_i}{v_i} = \mathbf{J}_s \qquad (i = 1, 2, 3, n).$$

Ces moments $\mathbf{m}_i$ sont orientés de telle sorte que dans une pièce désaimantée, leur résultante soit nulle

$$(2)\qquad \mathbf{M} = \sum_1^n \mathbf{m}_i = 0.$$

Deux domaines contigus v_i et v_{i+1} sont séparés par une mince zone de transition dite « paroi de Bloch » dans laquelle la direction du moment magnétique de la matière passe de celle du moment $\mathbf{m}_i$ à celle du moment $\mathbf{m}_{i+1}$ (*fig.* 2). Sous l'effet d'un champ magnétique **H** appliqué au matériau, celui-ci « s'aimante ». Autrement dit, l'application de **H** entraîne

$$(3)\qquad \mathbf{M} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{J} = \frac{\mathbf{M}}{V} \neq 0, \qquad \text{avec} \quad V = \sum_1^n v_i.$$

Lorsque **H** varie de zéro à l'infini, **J** (ou $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{J}$ qu'on emploie lorsque $H \ll 4\pi J$) varie suivant la fonction

$$(4)\qquad J = f(H)$$

représentée par la « courbe de première aimantation ».

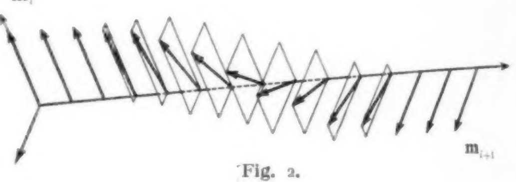


Fig. 2.

Lorsque H tend vers l'infini, J tend vers une valeur de saturation $J_s(T)$ qui dépend de la température T. La loi d'approche à la saturation peut être assez complexe [5].

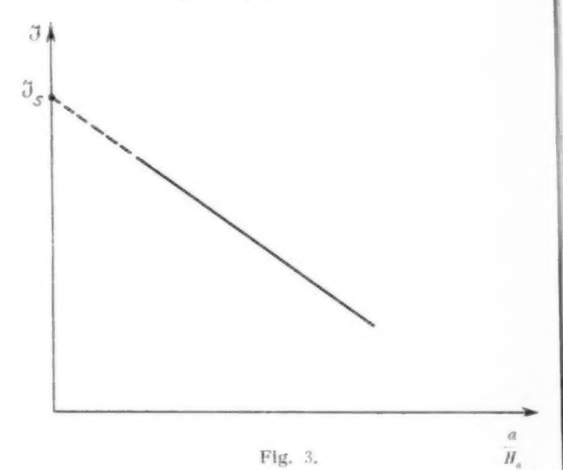


Fig. 3.

Cependant, dans beaucoup de cas, on admet [6], [7] que cette loi peut être représentée par

$$(5)\qquad J = J_s\left(1 - \frac{a}{H_a}\right),$$

H_a étant le champ réellement agissant dans le matériau.

On obtient J_s en traçant la droite $J = f\left(\frac{a}{H_a}\right)$ (*fig.* 3). Les valeurs de J_s obtenues à différentes températures T, définissent la loi $J_s = f(T)$ et,

par extrapolation, l'aimantation à saturation du zéro absolu : J_{s0}.

Au point de Curie, $T = \theta_c$, J_s tombe à des valeurs très faibles. A partir de θ_c et pour des températures supérieures, la substance devient paramagnétique.

D'après le postulat de Bohr [5] il existe une unité naturelle du moment magnétique égale au moment μ_B d'un spin électronique :

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi mc} = 9{,}27 \cdot 10^{-21} \text{ erg/gauss.} \tag{6}$$

Si n_0 est le nombre de magnétons de Bohr par atome de substance, tous les moments étant parallèles à la saturation au zéro absolu, le moment magnétique par atome vaut

$$\mu_A = n_0 \mu_B, \tag{7}$$

ce qui pour J_{s0} conduit à l'expression suivante, expression qui permet de déterminer n_0 :

$$J_{s0} = \frac{n_0 \mu_B d N_0}{A}. \tag{8}$$

N_0 étant le nombre d'Avogadro, A la masse atomique et d la masse spécifique.

La mesure de J_{s0} se ramène à la mesure d'un flux Φ [6], [7].

$$J_{s0} = k\Phi, \tag{9}$$

k étant une constante dépendant des dimensions de l'échantillon et de l'appareil de mesure.

2.2. Signification du point de Curie ferromagnétique θ_c et champ moléculaire.

En prenant comme moment élémentaire de la substance saturée à 0° K la valeur de μ_A et en considérant les moments de cette substance comme alignés parallèlement les uns aux autres (aimantation spontanée à saturation) par un champ d'origine interne H_m, l'énergie de μ_A dans ce champ est

$$E_{H_m} = -\mu_A H_m. \tag{10}$$

Lorsque la température croît, l'alignement des moments tend à être détruit par l'énergie d'agitation thermique E_T :

$$E_T = kT, \tag{11}$$

k étant la constante de Boltzmann.

Au point de Curie $T = \theta_c$ *l'aimantation spontanée prend une valeur voisine de zéro*, c'est-à-dire que l'effet de H_m est détruit par E_m. En supposant H_m indépendant de la température

$$\mu_A H_m = kT = k\theta_c, \tag{12}$$

d'où

$$H_m = \frac{k\theta_c}{\mu_A}. \tag{13}$$

Or, pour le fer, on trouve $H_m \sim 10^7$ Oe. Cette valeur est absolument incompatible, parce que beaucoup trop forte, avec celle d'un champ coulombien, $\mathbf{H}_{\text{coul}}$ calculé à partir de la valeur de μ_A et des distances interatomiques des ions de la substance ($H_{\text{coul}} \sim 10^3$ Oe).

Un certain nombre de substances paramagnétiques suivent la loi de Curie :

$$J = \frac{CH}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{J}{H} = \chi = \frac{C}{T} \tag{14}$$

C, étant une constante.

D'autres suivent la loi de Curie-Weiss :

$$J = \frac{CH}{T - \theta_c} \quad \text{ou} \quad \chi = \frac{J}{H} = \frac{C}{T - \theta_c}. \tag{15}$$

P. Weiss a mis en évidence la signification de θ_c en posant $\theta_c = NC$, d'où (15) est ramené à une forme analogue à (14) :

$$J = \frac{C(H + NJ)}{T}. \tag{16}$$

Autrement dit, la loi de Curie (14) est toujours valable en supposant que pour les matériaux suivant la loi (15), un « champ moléculaire » de valeur NJ vient s'ajouter au champ appliqué H.

Or, en étudiant le comportement d'un ensemble de moments magnétiques μ_A soumis à un champ H et à l'agitation thermique due à la température T, on trouve [5]

$$\frac{J}{J_0} = \text{th}\, \frac{\mu_A H}{kT}. \tag{17}$$

d'où pour une substance ferromagnétique ayant un point de Curie θ_c, et en substituant comme ci-dessus $H + NJ$ à H, on trouve

$$\frac{J}{J_0} = \text{th}\, \frac{\mu_A (H + NJ)}{kT} \tag{18}$$

et en posant $\theta_c = \frac{\mu_A N J_{s0}}{k}$, on trouve

$$\frac{J}{J_0} = \text{th}\, \frac{\frac{J}{J_0}}{\frac{T}{\theta_c}}. \tag{19}$$

L'application de la théorie des quanta conduit a

une expression dite fonction de Brillouin plus compliquée que (19). Pour les détails on se reportera à [5] (p. 430-432) ainsi qu'aux Ouvrages originaux cités par Bozorth. Cette fonction sera utilisée ci-après au paragraphe 4.

2.3. Structure atomique des substances ferromagnétiques.

Dans ce qui précède, on a supposé qu'il existait dans la substance des moments magnétiques libres.

Un atome ou un ion isolé peut avoir un moment magnétique μ_N, dû à la résultante entre le moment orbital produit par le mouvement des électrons autour du noyau et le moment d'électrons « non apairés ». Ces derniers sont des électrons dont le moment magnétique propre ou spin, n'est pas compensé par celui d'un autre électron du même

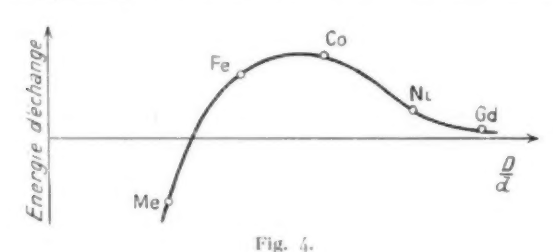


Fig. 4.

niveau d'énergie, orienté antiparallèlement au précédent. C'est le cas des atomes dont un niveau d'énergie est incomplet, comme ceux du fer, du nickel ou du cobalt. Dans un atome de fer, la couche $3d$ est incomplète et comprend quatre électrons non apairés ou « électrons porteurs de moment ». Cependant, lorsque les atomes de fer font partie du réseau cristallin du fer solide, les moments orbitaux sont « gelés » dans ce réseau de telle sorte que pratiquement ils se compensent mutuellement et ne contribuent que pour une faible part au moment magnétique de la matière.

Par ailleurs, les forces de liaison et les interactions mutuelles dans le réseau cristallin, provoquent une nouvelle organisation des niveaux d'énergie. Dans cette nouvelle répartition, le nombre d'électrons n'est plus n_0 mais une résultante statistique n_{eff}, *laquelle n'est pas nécessairement un nombre entier.* Ainsi, pour le fer : $n_{eff} = 2,2$.

La première condition pour l'apparition du ferromagnétisme est $n_{eff} \neq 0$, c'est-à-dire la présence d'électrons porteurs de moment libre *lorsque les atomes sont organisés en un réseau cristallin d'un corps solide.*

Une seconde condition est l'*existence d'un champ moléculaire* provoquant une orientation parallèle des moments magnétiques de ces électrons.

Or, ce champ moléculaire est d'origine quantique, et on l'attribue à une énergie d'échange, « interaction » ou « couplage », de signe positif entre les électrons porteurs de moment d'un atome avec ceux des z atomes adjacents du réseau cristallin. D'après Bethe, P. R. Weiss, Van Vleck [5] une interaction positive n'est possible que lorsque le rapport

$$(20) \qquad \frac{D}{d} = \frac{\text{distance interatomique}}{\text{diamètre de l'orbite incomplète}}$$

est compris entre des limites définies (*fig.* 4).

L'énergie d'échange est alors donnée par

$$J_1 = \frac{2\mu_B N J_m}{z} = \frac{k\theta_c}{z}.$$

D'après Slater, lorsque $\frac{D}{d} < 1,5$, l'interaction devient négative, ce qui se traduit par un alignement antiparallèle des spins et la matière est alors antiferromagnétique.

La contribution prépondérante des électrons au moment magnétique des matériaux est mise en évidence par la mesure de l'effet gyromagnétique et par la détermination du facteur g.

En effet, on trouve [5] que le rapport ρ_{orb} entre le moment mécanique $\mathfrak{M}$ et le moment magnétique M dus au mouvement d'un électron autour d'un noyau d'un atome est

$$(22) \qquad \rho_{orb} = -\frac{2mc}{e} = \frac{\mathfrak{M}}{M}.$$

Pour l'électron lui-même, ce rapport est

$$(23) \qquad \rho_{spin} = -\frac{mc}{e},$$

donc

$$(24) \qquad \rho_{orb} = 2\rho_{spin}.$$

On peut écrire, (22) et (23) sous la forme

$$(25) \qquad \rho = -\frac{mc}{e}\frac{2}{g} = \frac{1}{\gamma}.$$

Si $g = 1$, on a $\rho = \rho_{orb}$. Si $g = 2$, on a $\rho = \rho_{spin}$. Lorsque $g \neq 2$, on admet que le moment orbital intervient.

Les déterminations expérimentales récentes de ρ et de g [5] ont montré que, sauf dans quelques cas exceptionnels (et justifiés par la théorie), g est voisin de 2, ce qui prouve que le moment magnétique est surtout dû aux spins électroniques.

Les valeurs exactes ne sont pas absolument concordantes, mais la majorité des mesures donnent $1,85 < g < 2,15$.

2.4. Structure cristalline.

On citera, à titre d'exemple (*fig.* 5 et 6), la structure du fer (cubique), du nickel (cubique à faces centrées) et du cobalt (hexagonale).

Les propriétés magnétiques des cristaux ne sont pas isotropes et ils comportent des « directions » ou « axes » de facile aimantation, lesquels ont été représentés par les flèches sur les figures 5 et 6.

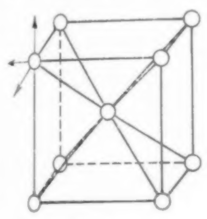


Fig. 5.

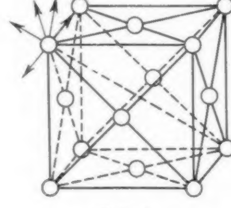


Fig. 6.

Dans le fer, ces axes sont parallèles aux côtés du cristal et dans le nickel, ils sont parallèles aux diagonales du cube. Le cristal de cobalt est uniaxe et cet axe de facile aimantation est parallèle aux arêtes latérales du prisme hexagonal. Telles sont également les structures des monocristaux parfaits.

Dans la pratique, les matériaux sont polycristallins et sauf dans des cas particuliers où l'on recherche l'obtention de grains orientés, les cristaux sont irréguliers et orientés au hasard, et à l'échelle macroscopique, le matériau apparaît comme un produit isotrope du point de vue magnétique.

2.5. Théorie des domaines et processus d'aimantation [8].

Une étude approfondie de C. Kittel [8] montre que la formation d'une paroi de Bloch de S cm² correspond à une densité d'énergie E_B erg/cm² due à l'orientation antiparallèle des moments sur les deux faces d'une paroi.

Par ailleurs, l'état énergétique d'un matériau peut être décrit par quatre termes partiels représentant des densités d'énergie :

a. L'énergie magnétostatique, égale à celle du moment d'un domaine soumis à l'action d'un champ H. Cette énergie est rapportée à 1 cm³, d'où

$$E_H = -\mathbf{H}\cdot\mathbf{J}_S = -HJ_S\cos\varphi. \qquad (26)$$

φ étant l'angle formé par $\mathbf{H}$ et $\mathbf{J}_S$.

b. L'énergie d'anisotropie E_k exprimée pour un cristal cubique par

$$E_k = K(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2). \qquad (27)$$

α_1, α_2, α_3 étant les cosinus directeurs du moment d'un domaine par rapport aux axes d'un cristal cubique et K la constante d'anisotropie spécifique du matériau.

c. L'énergie magnétoélastique

$$E_\sigma = \frac{3}{2}\lambda_S\sigma\sin^2\theta, \qquad (28)$$

λ_s étant le coefficient de magnétostriction de saturation, $\boldsymbol{\sigma}$ la tension appliquée au cristal et θ l'angle entre le $\mathbf{J}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

d. L'énergie d'échange à laquelle est liée l'existence du champ moléculaire

$$E_e = J_1 + S^2\sum_{i>j}\varphi_{ij}^2 \qquad (29)$$

J_1 étant l'intégrale d'échange et φ_{ij} l'angle entre les spins S voisins.

La formation des parois correspond à une diminution de la densité totale de l'énergie de la substance et la configuration deviendra stable lorsque cette énergie est minimum.

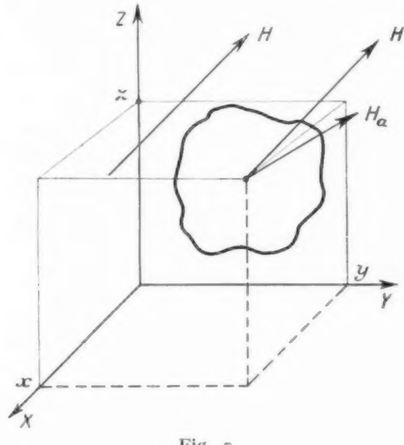


Fig. 7.

Dans un produit polycristallin non orienté, un cristallite peut comprendre plusieurs domaines et plus rarement, un domaine peut s'étendre à plusieurs cristallites. Il semble que, spontanément, les domaines aient une tendance à s'étendre à un seul cristallite.

Lorsqu'on applique un champ $\mathbf{H}(x, y, z)$ à un

matériau ferromagnétique, chaque point (x, y, z) de celui-ci est soumis à un champ effectif ou « réellement agissant » : $H_a(x, y, z)$ (*fig.* 7)

$$\mathbf{H}_a(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y, z) - \mathbf{H}_d(x, y, z), \tag{30}$$

$\mathbf{H}_d$ étant le champ démagnétisant dû à l'apparition de charges magnétiques libres. Cette relation se réduit à des expressions simples dans quelques cas particuliers (*voir* ci-après).

En reprenant les expressions (1) et (3) on peut exprimer la composante de $\mathbf{J}$ dans la direction de $\mathbf{H}_a$ sous la forme

$$J_{(H_a)} = \frac{\sum \mathbf{m}_i}{V} \frac{\mathbf{H}_a}{(H_a)}. \tag{31}$$

En posant $\mathbf{m}_i \frac{\mathbf{H}_a}{(H_a)} = J_S v_i \cos\theta_i$, on a

$$J_{(H_a)} = \frac{J_S}{V} \sum v_i \cos\theta_i. \tag{32}$$

Les variations de H_a se traduisent par des variations de $J_{(H_a)}$ d'où

$$\delta J_{(H_a)} = \frac{J_S}{V} \sum (\delta v_i \cos\theta_i - v_i \sin\theta_i \, \delta\theta_i). \tag{33}$$

Le premier terme exprime l'accroissement de volume du domaine i, ce qui se produit par le *déplacement des parois entourant ce domaine* (*fig.* 8).

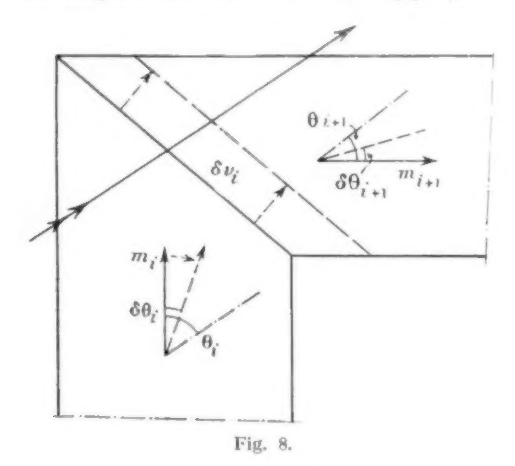


Fig. 8.

Le second terme exprime l'accroissement de la composante du moment $\mathbf{m}_i$ du domaine i dans la direction de $\mathbf{H}_a$ *par une rotation de ce moment* (*fig.* 8). Puisque $\mathbf{m}_i$ tend à se placer parallèlement à $\mathbf{H}_a$, θ tend à diminuer, donc $\delta\theta$ est négatif et l'on peut écrire

$$\delta J_{(H_a)} = \frac{J_S}{V} \sum [\delta v_i \cos\theta + v_i \sin\theta_i (-\delta\theta)], \tag{34}$$

les deux termes étant *positifs*.

Ces deux accroissements peuvent être réversibles ou irréversibles suivant l'amplitude de $\mathbf{H}_a$, la valeur de $\mathbf{J}$, la nature et la structure du matériau.

Aux rotations et aux déplacements réversibles correspondent diverses « perméabilités » aux champs de faible amplitude

$$\delta\mu = \frac{\delta H_a + 4\pi\, \delta J_{(H_a)}}{\delta H_a} = \frac{\delta B}{\delta H_a}. \tag{35}$$

Cette expression définit la perméabilité initiale μ_0 pour $H_a \neq 0$,

$$\mu_0 = \frac{\delta H_a + \delta J\,(H_a \to 0)}{\delta H_a} = \frac{\delta B}{\delta H_a} \qquad (H_a \neq 0). \tag{36}$$

Les rotations et les déplacements irréversibles entraînent l'irréversibilité de $J = f(H)$:

$$J = f(H)_{(M \nearrow)} \neq J = f(H)_{(M \searrow)}, \tag{37}$$

d'où les « cycles d'hystérésis » bien connus.

3. STRUCTURE CRISTALLINE ET GÉNÉRALITÉS SUR LA COMPOSITION DES FERRITES [1], [9].

Les ferrites sont des composés d'oxydes, comme les céramiques. On leur attribue souvent la formule chimique de « principe »

$$MeO \quad Fe_2O_3, \tag{38}$$

où Me est un métal divalent.

Cette formule est analogue à celle du minerai naturel, le spinelle

$$MgO \quad Al_2O_3 \tag{39}$$

dont la structure cristalline, déterminée en 1915 par W. H. Bragg ainsi que par Nishikawa, représente la structure-type des ferrites, lesquels, par extension, sont souvent appelés ferrospinelles.

Le cristallite élémentaire idéal ou « maille cristalline » comprend 8 « molécules » telles que (38) :

$$8(MeO \quad Fe_2O_3). \tag{40}$$

On peut représenter cette maille par un empilement cubique au tassement maximum de 32 sphères figurant les ions O^{--} dont le rayon ionique est 1,32 Å. Dans cet empilement on trouve, entre les sphères, deux types d'interstices ou sites : les sites A ou sites tétraédriques définis par quatre ions O^{--} et les sites B ou sites octoédriques définis par six ions O^{--}.

En remplaçant les sphères par des cubes (*fig.* 9) on met en évidence lesdits sites : les sites A sont définis par les sommets communs de quatre cubes,

par exemple : a, b′, c′, d′ et les sites B sont les espaces vides cubiques définis par les cubes pleins, par exemple : a, b, c, d, e, f (le cube f appartenant à la maille adjacente, a été figuré en pointillé).

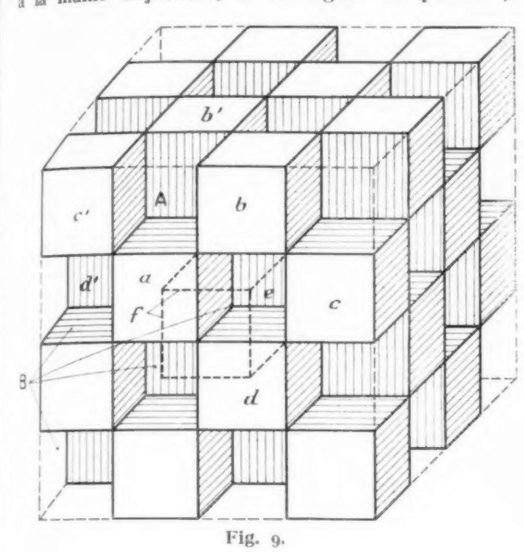


Fig. 9.

Les 8 ions Me^{++} et les 16 ions Fe^{+++} dont le rayon ionique est compris entre 1 et 0,44 Å se répartissent dans les sites A et B en formant deux ensembles d'ions (ou réseaux) distincts (E. M. Gorter [9]).

On peut distinguer trois types de distribution d'ions :

Tableau I.

Type de ferrite.	Sites A.	Sites B.
Normal	8 ions Me^{++}	16 ions Fe^{+++}
Inversé	8 » Fe^{+++}	8 » Me^{++} 8 » Fe^{+++}
Intermédiaire ...	$8-x$ » Me^{++} x » Fe^{+++}	x » Me^{++} $16-x$ » Fe^{+++}

Il y a lieu de remarquer que la formule (40) est « idéalisée » et elle n'est pas la seule compatible avec la structure ferrospinelle, ni avec les propriétés magnétiques des ferrites.

a. Le ferrite peut être mixte, c'est-à-dire, il peut être formé par une solution de plusieurs ferrites

$$\left(\sum_i X_i \, Me_i O\right) Fe_2O_3, \qquad (41)$$

avec $\sum X_i = 1$ et Me_i : différents ions divalents de rayon ionique compris entre 1 et 0,44 Å.

b. L'ion Me n'est pas nécessairement divalent. On citera [9] les composés comprenant des ions monovalents comme, par exemple, le ferrite de lithium :

$$(42) \qquad LiFe_5O_8 \quad \text{ou} \quad Li_{\frac{1}{2}}Fe_{\frac{5}{2}}O_4.$$

c. On peut avoir $\sum X_i < 1$ et même l'ion divalent peut être complètement absent, auquel cas on a une surstructure [9] comme par exemple l'oxyde $\gamma\, Fe_2O_3$.

d. L'ion trivalent n'est pas nécessairement celui du fer. Par exemple, on peut remplacer une partie des ions Fe^{+++} par l'ion Al^{+++}. D'autres cas sont possibles [9]. La répartition des ions métalliques dans les sites A et B est déterminée par un ensemble de facteurs [9] parmi lesquels on peut citer l'énergie due à l'attraction électrostatique (la liaison chimique dans ces composés étant du type « ionique »), l'énergie due aux forces de répulsion de Born et les énergies dues aux interactions magnétiques.

La plupart des ions dont la compatibilité avec le réseau spinelle n'est pas contestée actuellement, sont donnés dans le tableau II, établi d'après [1] et [9].

Tableau II.

Ion.	Valence.	Poids atomique.	Rayon ionique (Å).	n_0 ionique.	Site préféré.	Oxyde.	Poids moléculaire.
Li....	1	6.94	0.78	1	A-B	Li_2O	29,88
Ag...	1	107.88	1.13	0	A	Ag_2O	231,76
Mg...	2	24.32	1.78		A-B	MgO	40.32
Ca...	2	40.08	1.06	0	–	CaO	56.08
Mn...	2	54.03	0,91	5	–	MnO	70.93
Fe...	2	55.84	0.83	4	–	FeO	71.84
Co...	2	58.94	0.82	3	–	CoO	74.94
Ni...	2	58.69	0.78	2	B	NiO	74.69
Cu...	2	63.57	0.85	1	–	CuO	69,57
Zn...	2	65.38	0.82	0	A	ZnO	71.38
Cd...	2	112.4	1.03	0	A	CdO	128,4
Al...	3	26.97	0.57	0	A-B	Al_2O_3	101.94
V....	3	50.95	0.65	2	–	V_2O_3	149.90
Cr...	3	52.01	0.64	3	B	Cr_2O_2	152.02
Fe...	3	55.84	0.67	5	–	Fe_2O_3	159.68
Ga...	3	69.72	0.62	–	A	Ga_2O_3	187.44
Rh...	3	102.91	0,68	–	–	Rh_2O_3	261.82
In...	3	114.8	0.93	–	A	In_2O_3	277,60
Ti...	4	47.9	0,69	0	A-B	TiO_2	79.90
V....	4	50.95	0.65	1	–	VO_2	82.95
Mn...	4	54.93	0.52	3	B	MnO_2	86,93
Ge...	4	72.60	0.44	–	A	GeO_2	104.60
Sn...	4	118.70	0.74	–	A	SnO_2	150.70
Mo...	6	96	0.62?	–	–	–	–
W...	6	184	0.63?	–	–	–	–

4. LA THÉORIE DE M. L. NÉEL : LE FERRIMAGNÉTISME.

Pour qu'un ferrite possède des propriétés magnétiques, il faut que les deux conditions du paragraphe 2.3 soient réunies : la présence d'ions porteurs de moment et l'existence d'un « champ moléculaire ».

Les liaisons dans la maille du ferrite étant du type ionique, le moment d'un ion porteur de moment devrait, en principe, être égal à la somme des moments des électrons non apairés, c'est-à-dire

$$n_{eff} = n_0 \quad (\text{ionique}). \tag{43}$$

Si le champ moléculaire était dû à des interactions de signe positif, le moment d'une molécule (38) serait égal à la somme des moments des ions Me et Fe,

$$M = [n_0(\text{Me}) + 2n_0(\text{Fe})]\mu_B. \tag{44}$$

Ainsi le moment d'une molécule de la magnétite dans laquelle Me = Fe^{++} serait

$$M_{magn} = [4 + (2 \times 5)]\mu_B = 14\mu_B. \tag{45}$$

Or, d'après les mesures de Weiss et Forrer [6], ce moment est égal à $4{,}08\,\mu_B$. En supposant que les ions porteurs de moment contribuent au moment total, on voit que la valeur expérimentale est incompatible avec une interaction à signe positif.

D'autre part, au-dessus du point de Curie, la susceptibilité χ de certains ferrites n'obéit pas à la loi de Curie-Weiss (16) (§ 2 *b*) : la fonction $\frac{1}{\chi} = f(T)$ est concave dans la direction de l'axe des températures, au lieu d'être linéaire. L'explication théorique de ces anomalies a été donnée par L. Neel [2].

D'après L. Néel, on considère séparément deux ensembles d'ions, ceux occupant les sites A et ceux occupant les sites B. On désigne par $\mathbf{J}_a$ et $\mathbf{J}_b$ les moments magnétiques dus à un ion-gramme d'ions porteurs de moment, occupant respectivement des sites A et des sites B et par λ et μ les proportions respectives des ions dans ces deux sites.

Dans ces conditions, l'aimantation moyenne par ion-gramme est

$$\mathbf{J} = \lambda\mathbf{J}_a + \mu\mathbf{J}_b. \tag{46}$$

On considère d'autre part trois intégrales d'échange A_{aa}, A_{bb}, A_{ab} définissant les interactions entre les spins des porteurs de moment voisins immédiats des sites A et B. On associe à ces intégrales trois champs moléculaires : $\mathbf{h}_{aa}$, $\mathbf{h}_{bb}$ et $\mathbf{h}_{ab}$ et l'on pose $\mathbf{h}_a = \mathbf{h}_{aa} + \mathbf{h}_{ab}$, $\mathbf{h}_b = \mathbf{h}_{bb} + \mathbf{h}_{ab}$. D'une manière générale, d'après [2], on écrit

$$\mathbf{h}_a = \eta(\alpha\lambda\mathbf{J}_a + \varepsilon\mu\mathbf{J}_b), \tag{47}$$

$$\mathbf{h}_b = \eta(\beta\mu\mathbf{J}_b + \varepsilon\lambda\mathbf{J}_a), \tag{48}$$

avec $\eta > 0$ et $\varepsilon = \pm 1$.

M. Néel suppose d'autre part que $\mathbf{J}_a$ et $\mathbf{J}_b$ suivent séparément la loi (9) du paragraphe 2 *c* :

$$\mathbf{J}_a = \frac{C}{T}(\mathbf{H} + \mathbf{h}_a), \tag{49}$$

$$\mathbf{J}_b = \frac{C}{T}(\mathbf{H} + \mathbf{h}_b); \tag{50}$$

d'où, en éliminant $\mathbf{J}_a$, $\mathbf{J}_b$, $\mathbf{h}_a$ et $\mathbf{h}_b$:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T}{C} + \frac{1}{\chi_0} - \frac{\sigma}{T - \theta}, \tag{51}$$

avec

$$\frac{1}{\chi_0} = \eta(2\lambda\mu - \lambda^2\alpha - \mu^2\beta), \tag{52}$$

$$\sigma = \eta^2 C\lambda\mu[\lambda(1 + \alpha) - \mu(1 + \beta)]^2, \tag{53}$$

$$\theta = \eta C\lambda\mu(2 + \alpha + \beta). \tag{54}$$

D'après la relation (51) $\frac{1}{\chi}$ suit une loi hyperbolique, ce qui est en accord avec l'expérience. Donc la courbe expérimentale permet de déduire χ, σ, θ si l'on connaît λ, μ. Si l'on relève en outre $J = f(T)$ on peut, dans certains cas, déterminer λ, μ, α, β et η. Le point de Curie paramagnétique ou θ_p étant défini par $\frac{1}{\chi} = 0$, on trouve

$$\theta_p = = \frac{\eta C}{2}\left[\lambda\alpha + \mu + \sqrt{(\lambda\alpha - \mu\beta)^2 + 4\lambda\mu}\right]. \tag{55}$$

Si $\theta_p < 0$, la substance est paramagnétique jusqu'à 0° K. Si $\theta_p > 0$ la substance présente une aimantation spontanée lorsque $T < \theta_p$ et $H \to 0$. Cependant, L. Néel a prouvé que dans le cas des ferrites, on trouve un bon accord avec les résultats expérimentaux, en supposant que l'interaction entre les sous-réseaux A et B est négative : $A_{ab} < 0$, c'est-à-dire $\varepsilon = -1$.

Pour distinguer ce cas de celui des ferromagnétiques classiques dans lesquels les interactions sont positives (*cf.* § 2 *c*), M. Néel a proposé de le nommer le « ferrimagnétisme ».

L'apparition de l'aimantation spontanée dans les matériaux ferrimagnétiques est justifiée par ailleurs suivant le raisonnement de Weiss utilisé pour les substances ferromagnétiques. Pour $T < \theta_f$, l'aimantation spontanée J_s est la résultante entre les aiman-

tations spontanées des sous-réseaux A et B : $\mathbf{J}_{as}$ et $\mathbf{J}_{bs}$. On a alors

$$\mathbf{h}_a = \eta(-\lambda \mathbf{J}_{bs} + \alpha\mu \mathbf{J}_{as}), \tag{56}$$

$$h_b = \eta(-\lambda J_{as} + \beta\mu J_{bs}), \tag{57}$$

$$J_{as} = M_a B_a(z_a), \tag{58}$$

$$J_{bs} = M_b B_b(z_b), \tag{59}$$

$$M = N g j \mu_B. \tag{60}$$

$$B_j = \frac{2j+1}{2j} \coth \frac{2j+1}{2j} z - \frac{1}{2j} \coth \frac{1}{2j} z. \tag{61}$$

$$z = \frac{Mh}{RT}. \tag{62}$$

Étant donné que l'interaction entre les sous-réseaux A et B est négative J_{as} et J_{bs} sont anti-

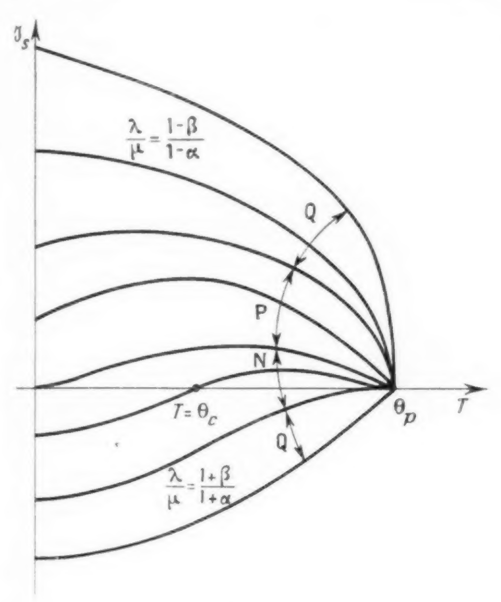


Fig. 10.

parallèles et J_s est égal à leur différence arithmétique

$$J_s = \mu J_{bs} - \lambda J_{as}. \tag{63}$$

Les renseignements les plus importants sont obtenus par l'étude de J_s au voisinage de 0° K et au voisinage de θ_c (θ_p dans le cas présent) où la fonction de Brillouin (61) peut être simplifiée.

1° J_{s0} change de signe autour de $\frac{\lambda}{\mu} = 1$;

2° $J_{as} \neq J_{bs}$ si $\alpha \neq \beta$;

3° $J_{as} \neq J_{bs}$ et $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ correspondent à $J_{s0} = 0$;

4° $\frac{dJ_s}{dt}$ change de signe près de θ_p pour $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1+\beta}{1+\alpha}$;

5° $\frac{dJ_s}{dt}$ change de signe près de 0° K pour $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1+\beta}{1+\alpha}$;

6° pour $\frac{\lambda}{\mu}$ compris entre 1 et $\frac{1+\beta}{1+\alpha}$ il existe une température θ_c pour laquelle $\lambda J_{as} = \mu J_{bs}$, c'est-à-dire $J_s = 0$. *θ_c est appelée température de compensation.*

Les divers cas possibles ont été représentés sur la figure 10, les lettres QPN désignent les cas correspondants de [2], p. 154. Le cas où il existe une température de compensation est expliqué par les courbes de la figure 11. M. Néel [2] a examiné les cas où l'un des sous-réseaux A et B n'est pas saturé à 0° K, c'est-à-dire le cas où les moments dudit sous-réseau ne sont pas parallèles entre eux à 0° K.

Yaffet et Kittel ont montré qu'on peut obtenir

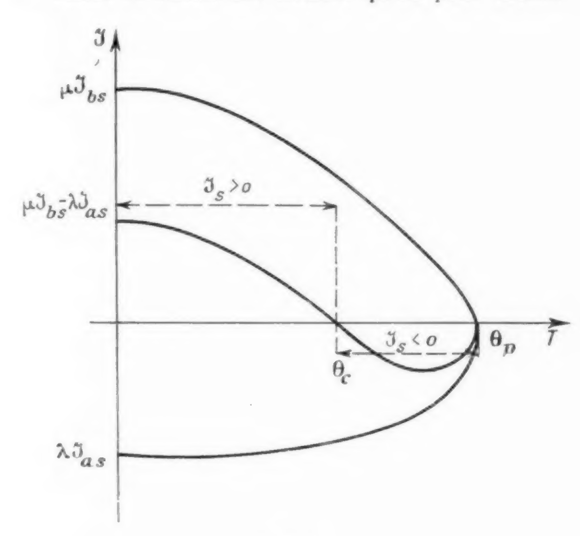


Fig. 11.

une configuration de plus faible énergie que dans le cas ci-dessus en subdivisant les réseaux A et B en sous-réseaux A'A", B'B", dans lesquels les moments élémentaires sont parallèles au 0° K sans que les moments de ces sous-réseaux soient parallèles entre eux.

Cette hypothèse élimine les cas V, R et M obtenus comme possibles dans le développement de M. Néel et justifie le maintien des solutions P, Q et N.

Les résultats précédents sont en contradiction avec les lois du ferromagnétisme. En effet, les interactions A_{aa}, A_{ab}, A_{bb} sont toutes les trois négatives. Or, les distances entre les ions divalents et trivalents occupant les sites A et B sont [9] : $D_{AA} \geq 3{,}61$ Å,

$D_{AB} \geqq 3{,}44$ Å, $D_{BB} \geqq 2{,}94$ Å. Le diamètre de l'orbite $3\,d$ des ions est de l'ordre de 1,3 Å. Donc $\frac{D_{AA}}{d} \sim 2{,}7$, $\frac{D_{AB}}{d} \sim 2{,}6$, $\frac{D_{FB}}{d} \sim 2{,}2$, ce qui devrait conduire, d'après les calculs de Bethe et de Slater (§ 2.3 et *fig.* 4) à des intégrales d'échange de signe positif.

D'autre part, il s'avère que l'intégrale d'échange la plus forte en valeur absolue correspond à l'interaction entre les sites A et B entre lesquels se trouve un ion O^{--}.

M. Neel a levé ces contradictions en appliquant au cas des ferrites la théorie des interactions indirectes entre les cations métalliques se produisant par l'intermédiaire de l'anion O^{--} (superéchange), théorie développée par M. H. Kramers.

L'énergie d'échange dépend du type de l'ion Me, de la distance entre les ions et de l'angle Me-O-Me′. Lorsque ce dernier prend les valeurs 180 et 90° l'énergie d'échange est respectivement maximum et minimum [9]. On explique ainsi la forte interaction A_{ab} et la faiblesse relative des interactions A_{bb} et A_{aa}.

3. LE MOMENT DE SATURATION, LE POINT DE CURIE ET LE RAPPORT GYROMAGNÉTIQUE.

L'aimantation ou le moment de saturation d'un ferrite est calculable grâce à la formule (63).

En posant $\mu = \sum \mu_i$, $\lambda = \sum \lambda_j$, ce qui suppose qu'on connaît la répartition des ions entre les sites A et B, et en supposant qu'on connaisse n_{oi} (ionique) et n_{oj} ionique correspondant aux divers ions des sites B et A, on peut écrire, en admettant que $g = 2$:

$$\mu_A = \mu_B \Big[\sum \mu_i n_{oi} \,(\text{ionique}) - \sum \lambda_j n_{oj} \,(\text{ionique}) \Big]. \tag{64}$$

Ce calcul est applicable à un ferrite correspondant à la formule

$$\Big(\sum_i \lambda_j \, \text{Me}_j, \sum \mu_j \, \text{Me}'_j \Big) O_4. \tag{65}$$

On en déduit le nombre total $n_0 = n_{eff}$ de porteurs de moments d'une molécule (65)

$$\sum \mu_i n_{oi} \,(\text{ionique}) - \sum \lambda_j n_{oj} \,(\text{ionique}), \tag{66}$$

en se reportant à la relation (8) on calcule J_{so}.

Cependant les valeurs expérimentales de n_{eff} prouvent que dans la plupart des cas $g \neq 2$. On a reproduit ci-après un tableau donnant les valeurs de n_{eff} obtenues expérimentalement par plusieurs auteurs pour quelques ferrites simples.

TABLEAU III.

	1. n_{eff} Gorter.	2. n_{eff} Guillaud.	3. n_{eff} Pauthenet.	4. n_{eff} calculé.
$MnFe_2O_4$	5	4.6	4.4 ± 0.04	5
$FeFe_2O_4$	4.2	4.03	4.08 ± 0.01	4
$CoFe_2O_4$	3.3	3.67-3.7	3.94 ± 0.002	3
$NiFe_2O_4$	2.3	2.4	2.224	2
$CuFe_2O_4$	1.3	–	1.37	1
$MgFe_2O_4$	1.1	1	0.86	0
$Li_{\frac{1}{2}}Fe_{\frac{5}{2}}O_4$	2.6	–	–	0
$ZnFe_2O_4$	0	0	–	0
$CdFe_2O_4$	0	–	–	0

Ces résultats confirment qu'un ferrite ne peut être ferrimagnétique que si des ions porteurs de moments se trouvent à la fois dans les sites A et dans les sites B. Dans le cas contraire (cas des ferrites de zinc et de cadmium) les interactions $A_{ab} = 0$, d'où $n_{eff} = 0$, c'est-à-dire $J = 0$.

On voit également que le ferrite de magnésium ne peut pas être d'un type défini : normal ou inversé, car dans les deux cas, on aurait $n_{eff} = 0$ (valeur calculée). Or, l'expérience montre que $n_{eff} \neq 0$. Par conséquent, le ferrite de magnésium est *partiellement* inversé et le nombre d'ions Mg répartis dans les sites A et B peut être calculé à partir de la valeur expérimentale de n_{eff}.

Dans le ferrite de cuivre, les ions Cu^{++} ne paraissent pas non plus être toujours répartis d'une manière définie dans les sites B [10]. Le moment des ferrites de Mg et de Cu, dépend assez fortement des traitements thermiques, lesquels détermineraient la répartition des ions Mg et Cu entre les sites A et B [10].

D'après Pauthenet et Bochirol, on calcule le taux X d'ions Mg et Cu disposé dans les sites A des ferrites correspondants trempés à partir d'une température T, par la relation

$$\frac{X(1-X)}{(1-X)^2} = e^{-\frac{E}{kT}}, \tag{67}$$

où k est la constante de Boltzmann et E l'énergie nécessaire pour transférer un ion Mg ou Cu d'un site B dans un site A et un ion Fe d'un site A dans un site B.

L'un des cas les plus intéressants est celui des

ferrites mixtes comprenant le ferrite de zinc. On se bornera au cas des ferrites doubles

$$X\,Zn(1-X)\,Fe^{+++}[(1-X)\,Me^{++}(1+X)\,Fe^{+++}]\,O_4. \tag{68}$$

Dans ce cas (66) donne, en rappelant que n_0 (ionique) $Fe^{+++} = 5$,

$$n_{eff} = 10\,X + (1-X)\,n_0\,\text{Me (ionique)}. \tag{69}$$

D'après cette relation, pour $X = 1$, $n_{eff} = 10$. Or, la formule (68) se réduit alors à celle du ferrite de zinc pour lequel on trouve $n_{eff} = 0$.

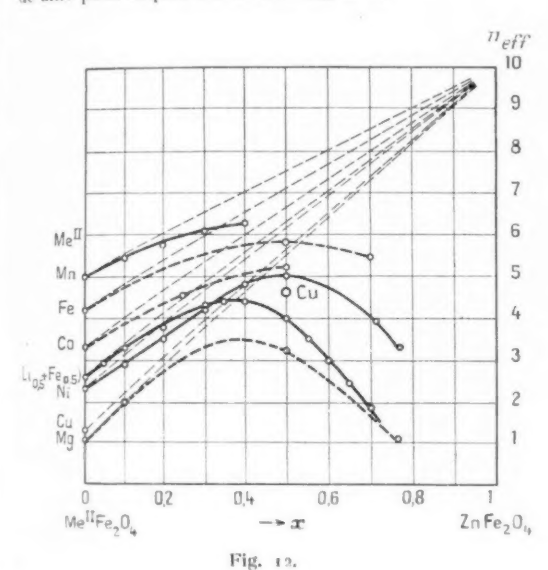


Fig. 12.

Cependant, la relation (69) suppose que les moments des porteurs de moments des sites A et B sont parallèles, quel que soit X et que A_{ab} est indépendant de X. Or, ceci ne semble pas être le cas lorsque X devient suffisamment grand [10]. Les figures 12 et 13 reproduisent les résultats expérimentaux obtenus par E. W. Gorter [10] et par C. Guillaud [12]. Les divergences entre les résultats expérimentaux seraient attribuées au fait que les résultats des mesures de [12] ont été extrapolés pour $H = \infty$ et pour $T = 0^{o}$ K.

Si l'on considère les ferrites pour lesquels $\theta_c = \theta_p$, c'est-à-dire les ferrites ayant un point de Curie θ_c classique défini, on trouve que θ_c varie en fonction de X. Dans les ferrites ferromagnétiques mixtes inverses, θ_c serait une fonction linéaire de X. Dans les ferrites mixtes à ferrite de zinc, θ_c décroît lorsque X croît [1], [13], [14].

Le point de Curie du ferrite mixte nickel-zinc :

$$X\,Zn(1-X)\,Fe[(1-X)\,Ni(1+X)\,Fe]\,O_4$$

serait calculable d'après J. Went et E. W. Gorter [23] par la formule

$$k\,\theta_c = \frac{1-X}{3+X}(E_A + 2\,E_B),$$

où E_A et E_B sont les énergies nécessaires pour inverser les moments des sites A et B, lorsque $T = 0^{o}$ K.

A titre d'exemple, on reproduit les résultats

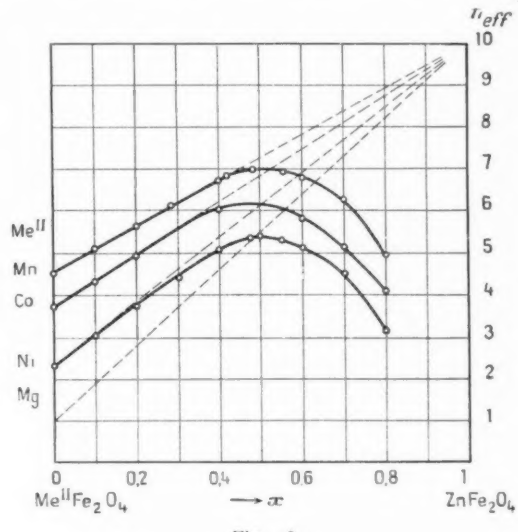


Fig. 13.

expérimentaux de Gorter [10] obtenus sur divers ferrites mixtes (tableau IV) :

$$(1+X)\,Ni(2-2X)\,Fe^{+++}X\,Ti\,X^{++++}O_4,$$
$$(1,5-X)\,Ni\,X\,Zn\,Fe^{+++}0,5\,Ti^{++++}O_4,$$
$$(1,5-X)\,Ni\,X\,Mn\,Fe^{+++}0,5\,Ti^{++++}O_4,$$
$$Fe^{++}(2-X)\,Fe^{+++}X\,Al\,O_4,$$
$$Ni(2-X)\,Fe^{+++}X\,Al\,O_4,$$
$$Mn(2-X)\,Fe^{+++}X\,Cr\,O_4.$$

Le facteur g des ferrites est déterminé par la méthode de résonance dans la gamme des ondes centimétriques.

Les relations (25) à (28) sont valables à condition de tenir compte des moments des sous-réseaux A et B.

On mesure

$$\omega_{res} = g\frac{e}{2\,mc}H_z, \tag{70}$$

H_z étant le champ efficace dans le matériau, d'où g.

TABLEAU IV.

x.	Formule.	n_{eff} recuit.	n_{eff} trempé.	θ_c recuit.	θ_c trempé.	θ_c compensation.	Constante du réseau (Å).
0.............	$Ni_{1,5}FeTi_{0,5}O_4$	1,44	1,12	293	265	–	–
0,1............	$Ni_{1,4}Zn_{0,1}FeTi_{0,5}O_4$	1,02	1,04	267	250	–	8,348
0,2............	$Ni_{1,3}Zn_{0,2}FeTi_{0,5}O_4$	1,07	1,34	265	235	–	8,355
0,3............	$Ni_{1,2}Zn_{0,3}FeTi_{0,5}O_4$	1,39	$1,52_5$	264	220	–	8,365
0,4............	$Ni_{1,1}Zn_{0,4}FeTi_{0,5}O_4$	1,73	1,82	240	195	–	8,372
0,5............	$Ni\ Zn_{0,5}FeTi_{0,5}O_4$	2,1	2,1	225	172	–	8,382
0.............	$NiFe_2O_4$	2,29	2,29	585	585	–	8,337
0,1............	$Ni_{1,1}Fe_{1,8}Ti_{0,1}O_4$	1,88	1,85	550	550	–	$8,337_5$
0,2............	$Ni_{1,2}Fe_{1,6}Ti_{0,2}O_4$	1,49	1,48	500	500	–	8,338
0,3............	$Ni_{1,3}Fe_{1,4}Ti_{0,3}O_4$	1,25	1,23	440	440	–	$8,338_5$
0,4............	$Ni_{1,4}Fe_{1,2}Ti_{0,4}O_4$	1,24	1,10	375	356	–	8,339
0,5............	$Ti_{1,5}Fe_{1,0}Ti_{0,5}O_4$	1,45	1,12	293	265	–	–
0.............	$Ni_{1,5}FeTi_{0,5}O_4$	1,45	–	293	–	–	–
0,2............	$Ni_{1,3}Mn_{0,2}FeTi_{0,5}O_4$	0,32	–	277	–	–	8,3752 ± 10
0,4............	$Ni_{1,1}Mn_{0,4}FeTi_{0,5}O_4$	0,30	–	265	–	–	8,4033 ± 4
$0,57_5$........	$Ni_{0,92_5}Mn_{0,57_5}FeTi_{0,5}O_4$	0,10	–	249	–	–	8,4456 ± 10
$0,67_5$........	$Ni_{0,82_5}Mn_{0,67_5}FeTi_{0,5}O_4$	$0,44_5$	–	192	–	–	8,4667 ± 10
$0,77_5$........	$Ni_{0,72_5}Mn_{0,77_5}FeTi_{0,5}O_4$	0,60	–	181	–	–	8,4834 ± 4
0,95............	$Ni_{0,55}Mn_{0,95}FeTi_{0,5}O_4$	1,11	–	152	–	–	8,5096 ± 7
1,1............	$Ni_{0,4}Mn_{1,1}FeTi_{0,5}O_4$	1,28	–	126	–	–	8,5412 ± 7
1,3............	$Ni_{0,2}Mn_{1,3}FeTi_{0,5}O_4$	1,42	–	109	–	–	8,5691 ± 10
1,5............	$Mn_{1,5}FeTi_{0,5}O_4$	1,68	–	89	–	–	8,6025 ± 10
0.............	$Fe_{1,00}[Li_{0,50}Fe_{1,50}]O_4$	2,47-2,60	–	680	–	–	8,331
0,50..........	$Fe_{1,00}[Li_{0,50}Fe_{1,00}Cr_{0,50}]O_4$	1,62-1,50	–	500	–	–	8,306
0,75..........	$Fe_{0,98}Li_{0,02}[Li_{0,48}Fe_{0,77}Cr_{0,75}]O_4$	1,35	–	410	–	–	8,296
1,00..........	$Fe_{0,94}Li_{0,06}[Li_{0,44}Fe_{0,56}Cr_{1,00}]O_4$	0,84	–	315	–	205	8,292
1,25..........	$Fe_{0,91}Li_{0,09}[Li_{0,41}Fe_{0,34}Cr_{1,25}]O_4$	0,61	–	214	–	+ 38	8,290
1,50..........	$Fe_{0,80}Li_{0,20}[Li_{0,30}Fe_{0,20}Cr_{1,50}]O_4$	0,55	–	119	–	— 16	8,287
1,60..........	$Fe_{0,64}Li_{0,36}[Li_{0,14}Fe_{0,26}Cr_{1,60}]O_4$	0,42	–	167	–	+ 11	8,288
1,70..........	$Fe_{0,54}Li_{0,46}[Li_{0,04}Fe_{0,26}Cr_{1,70}]O_4$	0,22	–	155	–	+ 20	8,290
2,00..........	$Fe_{0,50}Li_{0,50}[Cr_{2,00}]O_4$	0,10	–	80 ± 16	–	+37 ± 15	8,288
0.............	$NiFe_2O_4$	2,29	2,29	580		–	8,3370 ± 4
0,25..........	$NiFe_{1,75}Al_{0,25}O_4$	1,30	1,59	506	–	–	8,3062 ± 7
0,45..........	$NiFe_{1,55}Al_{0,45}O_4$	0,61	1,19	465	–	–	8,2769 ± 4
0,50..........	$NiFe_{1,50}Al_{0,50}O_4$	0,44	0,99	430	–	–	8,2705 ± 6
$0,62_5$........	$NiFe_{1,37_5}Al_{0,62_5}O_4$	0-0,045	–	360	–	–	8,2521 ± 7
0,66..........	$NiFe_{1,34}Al_{0,66}O_4$	–	–	368	–	–	8,2420 ± 20
0,68..........	$NiFe_{1,32}Al_{0,68}O_4$	–	–	356	–	–	8,2485 ± 1
$0,68_6$........	$NiFe_{1,31_4}Al_{0,68_6}O_4$	–	–				8,2388 ± 4
$0,68_8$........	$NiFe_{1,31_2}Al_{0,68_8}O_4$	–	–	≈340	–	–	8,2387 ± 2
0,70..........	$NiFe_{1,30}Al_{0,70}O_4$	–					8,2385 ± 7
0,75..........	$NiFe_{1,25}Al_{0,75}O_4$	0,38	0,58	294	–	–	8,2329 ± 7
1,0..........	$NiFe\ Al\ O_4$	0,64	0,42	198	–	–	8,1951 ± 7
0.............	$MnFe_2O_4$	4,85	–	330	–	–	8,5074 ± 2
$0,12_5$........	$MnFe_{1,87_5}Cr_{0,12_5}O_4$	4,04	–	272	–	–	8,5185 ± 1
0,25..........	$MnFe_{1,75}Cr_{0,25}O_4$	3,28	–	247	–	–	8,5107 ± 3
0,50..........	$MnFe_{1,50}Cr_{0,50}O_4$	1,73	–	210	–	–	8,4977 ± 2
1,00..........	$MnFe\ Cr\ O_4$	0,25	–	97	–	–	8,4809 ± 2
$1,08_5$........	$MnFe_{0,91_5}Cr_{1,08_5}O_4$	0,37		88	–	–	8,4869 ± 2
1,25..........	$MnFe_{0,75}Cr_{1,25}O_4$	(>) 0,45		15		–	8,4680 ± 2
1,50..........	$MnFe_{0,50}Cr_{1,50}O_4$	0,77	–	— 49	–	–	8,4567 ± 1
2,00..........	$Mn\ Cr_2\ O_4$	1,5	–	—233		–	8,426

Or, en tenant compte de $\frac{M_{spin}}{\mathfrak{M}_{spin}} = \frac{e}{mc}$, on a

$$(71)\quad g\frac{e}{mc} = \frac{1}{\rho} = \frac{\Delta(M_{spin} + M_{orb})}{\Delta_{spin}} = 2\,\frac{(M_{spin} + M_{orb})}{M_{spin}},$$

$$(72)\quad g_{eff} = 2\,\frac{(M_{spin} + M_{orb})A - (M_{spin} + M_{orb})B}{M_{spin}A - M_{spin}B},$$

On a reproduit ci-après le tableau donnant g_{eff} de quelques ferrites (d'après E. W. Gorter).

TABLEAU V.

Ferrite.	g_{eff}.	Température (° C)	$2C = \omega_{res}$ (cm).	Nature.
$MnFe_2O_4$....	2,05	Ambiante	1,24	Polycristal
$MnFe_2O_4$....	2,16	–	3,14	–
	2,02	–	0,64	–
$FeFe_2O_4$....	2,06	—153	3,35	Synthétique
	2,08-2,09	—143	3,35 1,25	Monocristal
	2,17-2,13	20	3,35 1,25	–
$CoFe_2O_4$....	Large raie	Ambiante	1,24	Polycristal
$CoFe_2O_4$....	2,22	100	3,2	»
	2,91	300	3,2	–
	2,08	480	3,2	Polycristal
$NiFe_2O_4$....	2,21	Ambiante	1,24	Monocristal
	2,19	»	1,25	Polycristal
	2,25 (av.)	— 195/588	3,33	»
	2,43	Ambiante	3,14	–
	2,12	»	0,64	–
$CuFe_2O_4$....	2,20-2,17	—195	1,25	Monocristal Polycristal
	2,05-2,06	450	1,25	–
$MgFe_2O_4$....	2,03-2,06	Ambiante	1,24	–
$Li_{0,5}Fe_{2,5}O_4$..	2,08	»	3,18	–

6. SYNTHÈSE DES FERRITES [1].

Dans ces grandes lignes, la synthèse des ferrites est semblable à celle des céramiques classiques. Les réactions chimiques se font par diffusion à l'état solide à haute température et conduisent à la formation d'un produit polycristallin.

6.1. Méthode générale.

Les matières premières : oxydes, carbonates, etc. sont convenablement dosées et mélangées. Le mélange est parfois « préfritté », c'est-à-dire chauffé à une température suffisamment élevée pour amorcer la formation du composé. Après ces opérations, le composé est broyé et mis en forme sous pression. Les pièces « crues » sont ensuite soumises à un traitement thermique dit « cuisson » au cours duquel la réaction entre les composants s'achève et les pièces acquièrent leur solidité finale.

Parmi tous les facteurs déterminant les caractéristiques mécaniques et magnétiques des pièces en ferrite, on citera : la pureté, la réactivité du mélange et les traitements thermiques. On se bornera à mentionner le rôle néfaste des impuretés provoquant la formation de phases ou d'inclusions non ferrimagnétiques dans la masse du produit.

On remarquera également que la « réactivité » dépend principalement de la finesse du mélange, du fait que la réaction à l'état solide est un phénomène de diffusion dont l'un des principaux paramètres est la surface de contact totale entre les particules des composants.

6.2. Méthodes particulières.

On signalera quatre méthodes pouvant être utilisées en pratique :

1° La coprécipitation des oxydes à partir d'une solution convenablement dosée de sels des métaux composants.

2° Le mélange des oxydes précipités séparément.

3° Le « grillage » d'un mélange intime de sels des métaux composants.

4° Le mélange et le broyage des oxydes commerciaux.

La première de ces méthodes semble conduire à des mélanges très réactifs, la dernière paraît donner des résultats plus médiocres, mais elle semble être la plus pratique et la plus économique.

6.3. Choix de l'oxyde de fer.

Un élément important pour la synthèse des ferrites est le choix de la matière première essentielle : l'oxyde de fer. On trouve des oxydes de fer soit sous la forme de magnétite $FeO\,Fe_2O_3$, soit sous la forme de sesquioxyde $\gamma\ Fe_2O_3$ ou $\alpha\ Fe_2O_3$. Ce dernier paraît être le plus courant soit sous la forme hydratée $Fe_2O_3\,nH_2O$ (oxyde jaune), soit anhydre (oxyde rouge). L'oxyde anhydre est souvent obtenu par « grillage » de l'oxyde hydraté ou d'un sel tel que le sulfate de fer. La réactivité et la teinte de l'oxyde rouge dépendent principalement de la

température dudit grillage. Parmi ces variétés d'oxydes, l'utilisateur puise le ou les oxydes convenant au mieux à la synthèse d'un ferrite déterminé.

6.4. Le traitement thermique.

Le traitement thermique principal ou cuisson détermine le frittage des particules et la formation du composé par la diffusion des ions.

La figure 14 représente un exemple de diagramme « durée-température » d'une cuisson. La partie a du diagramme correspond à la montée en température au cours de laquelle les liants organiques utilisés pour l'agglomération sont éliminés. La partie b comprise entre T_1 et T_2 correspond à la cuisson proprement dite, au cours de laquelle le frittage

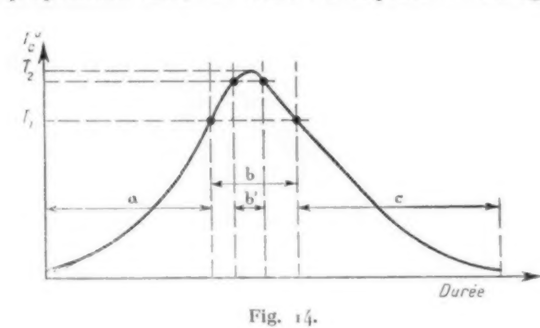


Fig. 14.

et la diffusion des ions ont lieu. La partie b' est souvent appelée « palier » de cuisson. La partie c correspond au refroidissement des pièces. La durée totale de la cuisson est t. La durée réelle de la cuisson effective est t_b et $t_{b'}$ et est souvent appelée « durée du palier ».

Pour un produit donné, T_1, T_2, t_b et $t_{b'}$ détermineront le degré de réaction entre les composants et le degré du frittage dont dépend la porosité (ou l'étanchéité) du produit et la taille des cristaux dont sera composée la masse.

La pente de la partie c déterminera la « trempe » ou le « recuit ». Au cours du frittage, et surtout entre les températures T_1 et T_2, le matériau prend du retrait. Si l'on désigne par l_1 la valeur d'une dimension de la pièce crue, sortant du moule et par l_2 la mesure de la même dimension de cette pièce frittée, le retrait r est défini par

$$r = \frac{l_1}{l_2} - 1. \qquad (73)$$

Or, dans certains cas, le retrait r d'un mélange de réactivité donnée, est surtout déterminé par T_2 tandis que le diamètre moyen des cristaux dépend à la fois de T_2 et de t_b. Par conséquent, il serait parfois possible de régler séparément la porosité ou la densité du produit et la taille des cristaux.

6.5. L'atmosphère de la cuisson.

L'atmosphère dans laquelle sont effectués les traitements thermiques, concurremment avec la température du palier T_2 et plus généralement, compte tenu de toute la courbe de cuisson, détermine le taux d'oxygène dans la masse du produit.

Un excès ou un défaut d'ions O par rapport à la stœchrométrie, peut se traduire par la formation de défauts dans le réseau cristallin et par un changement de valence de certains ions métalliques comme $Fe^{+++} \rightleftarrows Fe^{+++}$ Mn^{++++} $Mn^{+++} \rightarrow Mn^{++}$. La teneur convenable en oxygène est réglée dans chaque cas particulier par le choix de la courbe de cuisson et de l'atmosphère de cuisson ou encore [1] par un traitement thermique supplémentaire, à basse température et éventuellement en atmosphère contrôlée.

7. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FERRITES.

7.1. Comparaison entre les ferrites et les matériaux ferromagnétiques métalliques.

Les ferrites ont des propriétés magnétiques semblables à celles des matériaux ferromagnétiques métalliques. Ils se distinguent de ces derniers par leur moment de saturation relativement faible et par leur résistivité élevée ($10^{-5}\,\Omega$/cm pour les métaux et 10^{-2} à plus de $10^{9}\,\Omega$/cm pour les ferrites). De ce fait, on peut étudier leurs propriétés diélectriques et les utiliser sous la forme de pièces massives jusqu'à des fréquences très élevées.

7.2. La conductibilité électrique des ferrites.

Les ferrites sont rangés dans la classe des semi-conducteurs [15]. D'après F. E. Williams [16], le traitement théorique du type Heitler-London conviendrait mieux aux composés du type ionique, donc aux ferrites, que la théorie des « bandes d'énergie » (Bloch, Brillouin, Wilson, etc.). D'autres auteurs (C. Guillaud [20]) considèrent le modèle de Wilson ou la théorie de Nijboer. Cependant, la plupart des auteurs [10], [15], [21], [22] préfèrent un traitement plus simple en abordant le problème du point de vue des modifications du réseau cristallin.

Dans un réseau spinelle parfait, les liaisons étant

ioniques et complètes (les valences des ions Me et Fe complétant celles de O^{--}) il n'existe pas d'électrons libres pouvant, *a priori*, contribuer à la conductibilité. Donc si les ions ne sont pas à l'état « excité », la conductibilité devrait être quasi nulle. Cependant, la conductibilité peut apparaître du fait de la présence dans le réseau :

1° d'impuretés ou de défauts;

2° d'ions du même métal ayant deux états de valence différents et occupant deux sites cristallographiques différents.

Dans le premier cas, les impuretés ou les défauts peuvent être constitués par des défauts de stœchrométrie (par exemple par un excès ou par un défaut d'ions O^{--}).

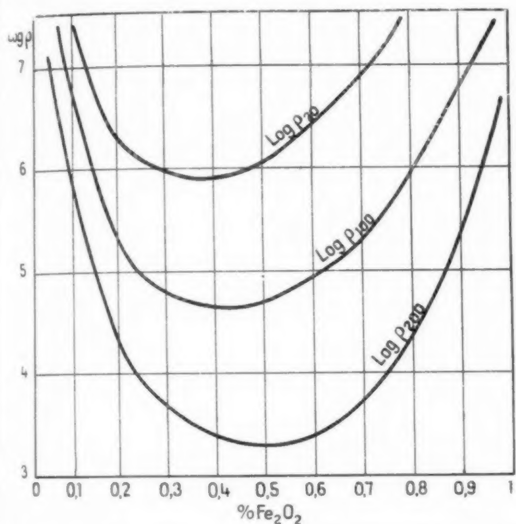


Fig. 15. — Résistivité (Ω/cm) des composés $X\,Fe_2O_3$ [20].

Le second cas est celui de la magnétite FeO Fe_2O_3 ou Fe^{3+} (Fe^{2+} Fe^{3+}) O_4 ou celui des ferrites mixtes dans lesquels une partie des ions Me est l'ion Fe^{++} divalent. On mentionnera également les produits à « valence induite » par un ion étranger ou par une impureté [15], [16], [17].

Le type de conductibilité peut être n ou p et, en principe, la conductibilité suit la loi

$$\sigma = A\,e^{-\frac{E}{kT}}, \tag{74}$$

où k est la constante de Bolzmann, A un paramètre dépendant de la densité et de la mobilité des porteurs de charge, T la température absolue et E l'énergie d'activation (en adoptant la terminologie consacrée par la « théorie des bandes »).

On écrit souvent cette expression sous la forme

$$\sigma(T) = \sigma_\infty\,e^{-\frac{B}{T}} \tag{75}$$

ou

$$\rho(T) = \rho_\infty\,e^{+\frac{B}{T}}, \tag{76}$$

ρ_∞ étant un paramètre ayant les dimensions d'une résistivité et B est un facteur exprimé en degrés Kelvin.

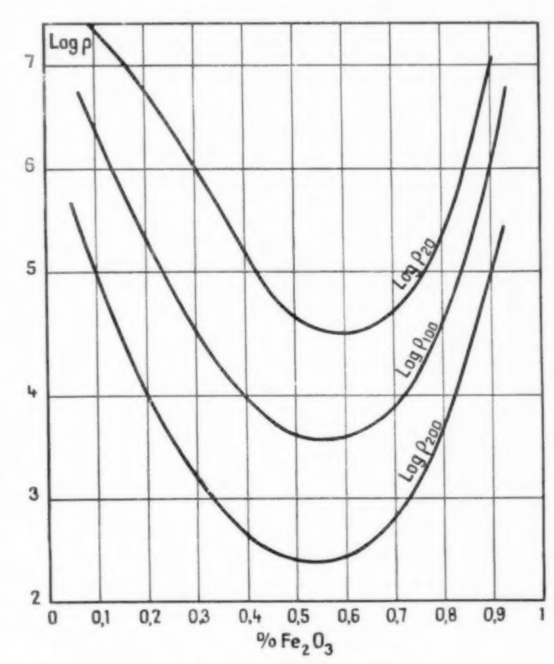


Fig. 16. — Résistivité (Ω/cm) des composés $X\,Fe_2O_3\,(1 - X)$ MgO [20].

Donc, en principe, la relation

$$\log \sigma = \log \sigma_\infty - \frac{B}{T} \tag{77}$$

est représentée par une droite dans le diagramme $\log \sigma\ \frac{B}{T}$.

On définit le coefficient de température

$$\alpha\sigma(T) = \frac{d\sigma}{dT} = \frac{B}{T^2} \tag{78}$$

et celui de la résistivité

$$\alpha\rho(T) = -\frac{B}{T^2}. \tag{79}$$

On voit que lorsque la température croît la conductibilité croît, donc la résistivité décroît.

Les faits semblent très compliqués lorsqu'on considère un produit polycristallin pouvant être poreux et comporter entre les cristallites des couches de structure différente de celle de la masse [18].

Dans ces conditions, la conductibilité d'un ferrite et la variation thermique de celle-ci, ne peuvent pas être définies comme des caractéristiques *spécifiques* d'un matériau de composition donnée, mais comme des propriétés propres d'un matériau d'une *provenance* donnée.

On a reproduit ci-après les résultats expérimentaux de [15] et [20] (*fig.* 8, 10 et 12) obtenus sur des spinelles et parmi lesquels les ferrites de nickel, de zinc, de magnésie et la magnétite. Les résultats de C. Guillaud ont été obtenus sur des échantillons cuits à une température relativement basse (inférieure à 1200° C).

Mesure de la résistivité. — La mesure de la résistivité peut être effectuée par une méthode et avec des appareils courants. Une difficulté réside dans la réalisation d'un contact parfait entre les électrodes et la pièce en ferrite [19], [20]. D'après G. Moltgen [19] les meilleurs résultats seraient obtenus par un dépôt de couches de métallisation sous vide. Les couches de métallisation à la peinture d'argent donneraient également satisfaction [20]. Par ailleurs, il semble indiqué de roder soigneusement les faces à métalliser

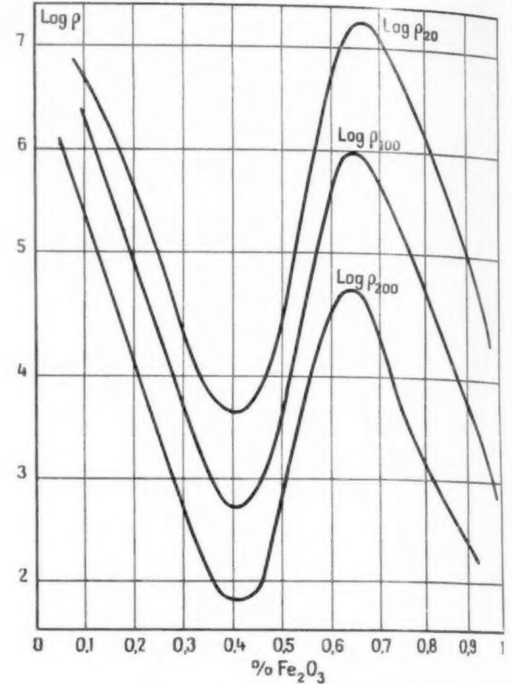


Fig. 17. — Résistivité (Ω/cm) des composés $X\ Fe_2O_3\ (1 - X)\ ZnO$ [20].

pour mettre à nu la masse du matériau avant le dépôt de la couche métallique. En effet, dans certains cas, la conductibilité de la surface brute de cuisson

Tableau VI.

(D'après Bradburn et Rigby [15].)

Échantillon.	*E.*	*T* (°C).	ρΩ (900° C).	σΩ⁻¹ (900° C).	Type de construction.
Aluminate de cobalt	1,55	700-1 020	$11,7.10^3$	$8,55.10^{-4}$	Trou positif
» magnésium	1,14	740-1 010	75,3 »	1,33 »	Électronique
» nickel	1,82	780-1 020	36,4 »	2,75 »	Trou positif
» zinc	0,86	640- 980	18,6 »	5,38 »	Électronique
Chromite de cobalt	1,05	500-1 010	40.1.10	$2.49.10^{-3}$	Trou positif
» magnésium	0,95	535-1 000	$10.3.10^2$	$9.71.10^{-4}$	»
» zinc	1,27	800-1 020	97.2 »	1.03 »	»
	1.09	480- 800	–	–	»
Ferrite de magnésium	1,16	610- 830	25,1	$3,98.10^{-2}$	Électronique
» nickel	1.01	500-1 000	51.3	1,95 »	»
	0,77	225- 500	–	–	»
» zinc	0,96	500-1 020	78.0	$1.28.10^{-2}$	»
	0,83	290- 500	–	–	»
» fer	0,76	655-1 000	54.7.10	$1.83.10^{-3}$	Trou positif
Magnétite	0,106	90- 400	*R* (300° C) = 5,4	*K* (300° C) = $1,85.10^{-1}$	Semi-conducteur intrinsèque

d'une pièce en ferrite, est nettement différente de celle de la masse.

On citera le cas d'un ferrite de manganèse dont la résistivité massique était de $10^2\ \Omega$/cm et la résistivité apparente mesurée sur une pièce non rôdée : $10^5\ \Omega$/cm. Il y a lieu également de prendre des précautions afin d'éviter les phénomènes thermoélectriques [26] (effet Peltier et effet Seebek).

D'après G. Moltgen, la résistivité ne paraît pas varier en fonction de la tension de mesure [19] (coefficient de tension ou de « non-linéarité » nul), tandis que C. Guillaud aurait observé un coefficient de tension sur des échantillons légèrement poreux.

7.3. Le pouvoir inducteur spécifique et les pertes diélectriques.

Les ferrites se comportent aux basses fréquences comme des diélectriques à très fortes pertes. Le pouvoir inducteur spécifique ε_r décroît rapidement lorsque la fréquence croît et paraît tendre, dans beaucoup de cas, vers une valeur limite voisine de 10.

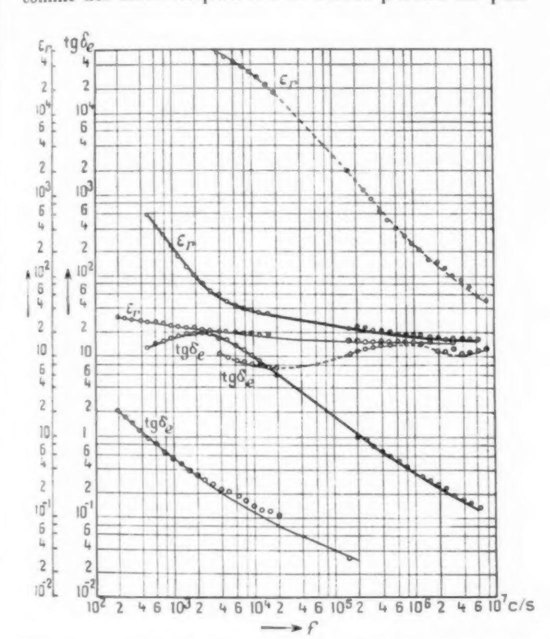


Fig. 18. — Variation de ε_r et de tg δ_e des ferrites [19].
——— Échantillon 289 (Cu-Zn, 90 % Zn).
═══ » 280 (Cu-Zn, 50 % Zn).
— — — » 296 (Cu-Zn à gros cristaux).

La tangente de l'angle de pertes diélectriques tg δ décroît dans les mêmes conditions et pour certains produits passe par un maximum local aux basses fréquences [19].

TABLEAU VII.
(D'après Moltgen [19].)

Échantillon n°	Nature du ferrite.	Conductibilité.	ε_r à 1 kc/s.	ε_r (Mc/s).	Maximum de tg δ_e à
289 (*fig.* 18).	Cu-Zn	$7 \cdot 10^{-11}$	25	16	100 c/s
168	Ni-Zn	$4.3 \cdot 10^{-9}$	37	12	100 »
288	Cu-Zn	$8 \cdot 10^{-8}$	40	16	100 »
157	Cu-Zn	$2.2 \cdot 10^{-7}$	160	90	150 »
290	Cu-Zn	$8.4 \cdot 10^{-7}$	35	14	200 »
280 (*fig.* 18).	Cu-Zn	$1.8 \cdot 10^{-6}$	220	16	3 kc/s
278	Cu-Zn	$8.35 \cdot 10^{-6}$	1600	16	16 »
239 Al......	Ni-Zn	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^4$	15	60 »
296 (*fig.* 18).	Cu-Zn	10^{-3}	10^5	45	1 Mc/s

Le pouvoir inducteur spécifique atteindrait des valeurs d'autant plus élevées aux basses fréquences que le ferrite est plus conducteur. On donne ci-après les courbes représentant la variation de ε' et ε'' correspondant à

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (80)$$

d'un ferrite de nickel (ferroxcube IV A) et d'un ferrite de manganèse (ferroxcube III B) [23].

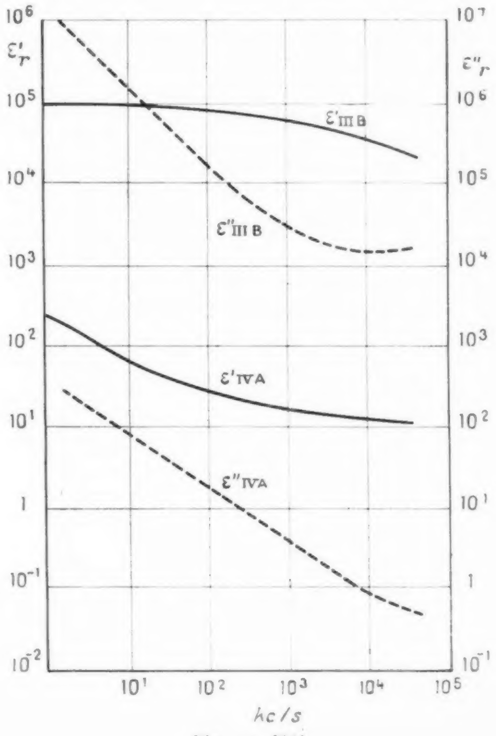


Fig. 19. [21].

Ces propriétés seraient explicables en considérant le ferrite comme un matériau hétérogène du point de vue électrique [23]. Nous citerons un essai de calcul théorique de G. Möltgen [19] qui considère un diélectrique à deux couches de pouvoir inducteur spécifique et d'angle de pertes différents.

La mesure du pouvoir inducteur spécifique est délicate du fait que le ferrite est un diélectrique à fortes pertes et à résistivité relativement faible vis-à-vis des diélectriques classiques [19].

Pour les mesures, il est indiqué de prendre des précautions analogues à celles mentionnées dans le chapitre précédent.

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. L. Harvey, I. J. Hegyi et H. W. Leverenz, *Ferromagnetic spinels for radio frequencies* (*R. C. A. Rev.*, septembre 1950).

[2] L. Néel, *Propriétés magnétiques des ferrites : ferromagnétisme et antiferromagnétisme* (*Ann. Phys.*, 12e série, vol. 3, mars-avril 1948, p. 137-268).

[3] D. P. 226.347-227.778.

[4] Brevets français nos 887.083, 895.532, 904.800, 905.536, 906.784, 937.076 et 943.955.

[5] R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, D. Van Nostrand Co Inc., New-York, 1951.

[6] P. Weiss et R. Forrer, *La saturation absolue des ferromagnétiques et les lois d'approche en fonction du champ et de la température* (*Ann. Phys.*, 10e série, t. 12, novembre 1929).

[7] R. Pauthenet, *Aimantation spontanée des ferrites* (*Thèse*, 17 mars 1951).

[8] C. Kittel, *Physical theory of ferromagnetic domains* (*Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, n° 4, octobre 1949).

[9] E. W. Gorter, *Saturation magnetization and crystal chemistry of ferrimagnetic oxides* [*Philips. Res. Rep.*, août 1954, p. 295-320 (96 réf. bibl.)].

[10] E. W. Gorter, *loc. cit.*, octobre 1954, p. 321-365 et décembre 1954, p. 403-443.

[11] Y. Yaffet et C. Kittel, *Phys. Rev.*, t. 87, 1952, p. 290-294.

[12] C. Guillaud, *Propriétés magnétiques des ferrites* (*J. Phys. Rad.*, t. 12, mars 1931, p. 239-248).

[13] N. Kawai, *Studies on ferrites, Formation of solid solutions between some ferrites* [*J. Soc. Chem. Ind.* (*Japan*), vol. 37, n° 4, 1934, p. 392-394 et 174 B (sup. issue)].

[14] Forestier et Vetter, *Étude des systèmes* Fe_2O_3, NiO-Fe_2O_3-MgO, Fe_2O_3-NiO-Fe_2O_3-CuO *et* Fe_2O_3-NiO-Fe_2O_3-ZnO (*C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 164-167).

[14 *a*] Snoeck, *Physica*, t. 2, n° 6, 1936, p. 463-483.

[15] T. E. Bradburn et C. R. Rigby, *The electrical conductivity of spinels* (*Trans. Brit. Ceram. Soc.*, vol. 52, n° 8, 1953).

[16] Fred E. Williams, *Theory of ionic crystals, semi-conductors and dielectrics* [*Ann. Rev. Phys. Chem.* (*Annua*) *Rev. Und. Sternford California*, t. 3, 1952, p. 339-358).

[17] F. J. W. Verwey, P. W. Haayman, F. C. Romeijn et G. W. van Oesterhout, *Controled valency semi-conductors* (*Philips Res. Rep.*, t. 5, n° 3, 1950, p. 173).

[18] P. Prache, *Modèle pour les ferrites* (Communication à la Société Française des Électriciens, 1954).

[19] G. Möltgen, *Dielektrische Untersuchungen an Ferriten* (*Z. Angew. Phys.*).

[20] C. Guillaud et R. Bertrand, *Étude de la conductibilité des semi-conducteurs et application aux systèmes mixtes d'oxydes* (*J. Rech. C. N. R. S.*, n° 18, 1952).

[21] E. J. W. Vervey, P. W. Haayman et F. C. Romeyn, *Semi-conducteurs dont la résistivité a un grand coefficient de température négatif* (*Rev. Tech. Philips*, t. 9, n° 8, 1947-1948, p. 239-249).

[22] E. J. W. Vervey, *Conductibilité électronique des substances non métalliques* (*Rev. Techn. Philips*, t. 9, n° 2, 1946, p. 46-54).

[23] J. J. Went et E. W. Gorter, *Les propriétés magnétiques et électriques des matériaux ferroxcubes* (*Rev. Tech. Philips*, t 13, n° 8, février 1952, p. 221 I/256).

BILAMES EN CÉRAMIQUE PIÉZOÉLECTRIQUE UTILISÉS COMME TRANSFORMATEURS ÉLECTROACOUSTIQUES. CAS DES MICROPHONES [1]

Par J. PEYSSOU,

Département « Recherches Physicochimiques »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

Sommaire. — *Après avoir rappelé la définition élémentaire du phénomène piézoélectrique d'une lame de titanate de baryum et les lois de la flexion plane d'une poutre, l'auteur calcule la formule qui permet de déterminer la force électromotrice engendrée par un bilame piézoélectrique encastré à une extrémité, en fonction de ses dimensions et de la force de déformation appliquée à l'autre extrémité.*

Il applique ce résultat à un microphone à « élasticité prépondérante », compte tenu des capacités parasites du câble et de la résistance d'entrée de l'amplificateur.

Il montre ensuite comment on peut modifier les rapports tension-impédance interne en jouant sur le type de montage des bilames, le dessin des métallisations, leur groupement électrique, le profil du bilame (trapézoïdal ou rectangulaire).

Il termine par l'étude d'un bilame circulaire qui jouerait le rôle de diaphragme du microphone.

En conclusion, le modèle le plus avantageux est le bilame rectangulaire, encastré à une extrémité et dont l'autre extrémité est solidaire du centre de la membrane métallique du microphone.)

(C. D. U. : 621.395.61/62 : 621.315.612.4.)

Summary. — *After having restated the elementary definition of the piezo-electric phenomenon of a baryum titanate strip and the laws of plane flexure of a beam, the author calculates the formula for the determination of the electromotive force generated by a piezo-electric bimetallic strip fixed at one end, in terms of its dimensions and of the distorting force applied at the other end. He applies this result to a " dominant elasticity " microphone, taking into account stray capacities of the cable and of the amplifier input resistance.*

He then shows how the internal voltage-impedance ratios can be modified by varying the bimetallic strip assembly and mounting, the metallisation pattern, their electrical grouping and the profile of the bimetallic strip (trapezoidal or rectangular).

He ends with the design of a circular bimetallic strip which would act as the diaphragm of the microphone.

In conclusion, the most promising form is the rectangular bimetallic strip, fixed at one end, the other end being secured to the centre of the microphone's metallic membrane.

(U. D. C. : 621.395.61/62 : 621.315.612.4.)

1. RAPPEL DE LA LOI FONDAMENTALE DES PHÉNOMÈNES PIÉZOÉLECTRIQUES.

Lorsqu'un parallélépipède de matériau piézoélectrique de dimensions $a.b.e$ est comprimé par une force F normale aux deux faces de dimensions $a.e$ (*fig.* 1), il apparaît sur les faces de dimensions $a.b$ une charge électrique de densité σ proportionnelle à la force unitaire

$$T = \frac{F}{a.e}$$

(le coefficient de proportionnalité δ est appelé

[1] Manuscrit reçu le 26 octobre 1956.

« module piézoélectrique transversal »)

$$(1) \qquad \sigma = \delta N.$$

Pour une céramique au titanate de baryum, $\delta = 200 . 10^{-8}$ u. C. G. S.

Puisque les faces de la cellule sont métallisées, les

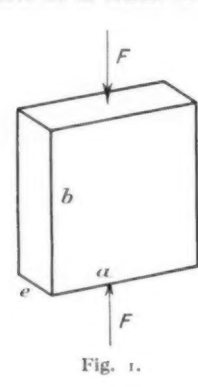


Fig. 1.

métallisations sont portées à une tension V telle que $Q = CV$, où C est la capacité du condensateur ainsi réalisé.

2. FLEXION PLANE.

Soit une poutre fléchie sous l'action de couples Γ (*fig.* 2). Une section AB de cette poutre est en équilibre sous l'action du couple extérieur Γ appliqué sur sa droite et du couple résultant des forces internes N normales à AB, appliquées sur la face AB.

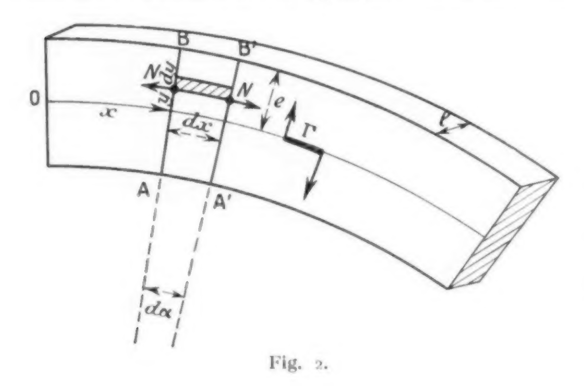


Fig. 2.

Soit un filet de poutre de longueur dx, situé à la distance y de la fibre neutre.

Dans la flexion, les deux tranches AB et A'B' s'inclinent l'une sur l'autre de l'angle dα et, de ce fait, le filet d'ordonné y s'allonge de y dα : l'allongement relatif est donc $y\frac{d\alpha}{dx}$.

La relation de Hookes, appliquée à ce filet, se traduit par

$$(2) \qquad N = Ey\frac{d\alpha}{dx},$$

où E est le module d'élasticité et N la force par centimètre carré.

En outre, la formule classique

$$(3) \qquad \Gamma = EI\frac{d\alpha}{dx}$$

relie le couple Γ des forces extérieures appliquées sur la droite de l'élément AA'B'B, au moment d'inertie I de la poutre par rapport au plan de la fibre neutre, et à la courbure au point A d'abscisse x.

3. FORCE ÉLECTROMOTRICE ÉLÉMENTAIRE.

Soit e la demi-épaisseur de la poutre, et l sa largeur. Supposons que la tranche AA'B'B considérée au paragraphe précédent soit en matériau piézoélectrique de module δ. L'effort de la force unitaire N fait apparaître sur les faces du filet d'épaisseur dy la densité électrique $\sigma = \delta N$, d'où une tension

$$dV = \frac{\sigma}{C},$$

où C est la capacité d'un condensateur d'épaisseur dy et de surface 1 cm²

$$C = \frac{K \times 1\ \text{cm}^2}{4\pi\, dy},$$

où K est la constante diélectrique du matériau.

Remplaçons N par sa valeur tirée de la formule (2); il vient

$$(4) \qquad dV = 4\pi\frac{\delta}{K}E\frac{d\alpha}{dx}y\,dy,$$

ce qui montre, en remarquant le facteur y, que :

« Pour un filet d'épaisseur dy donnée et de courbure donnée, la tension créée est la plus importante quand ce filet se trouve sur les faces supérieure ou inférieure de la poutre. »

Essayons d'évaluer la tension créée entre la fibre neutre et la surface de la poutre, pour la tranche d'épaisseur totale e de longueur dx, de largeur l,

$$V = 4\pi\frac{\delta}{K}E\frac{d\alpha}{dx}\int_0^e y\,dy = 4\pi\frac{\delta}{K}E\frac{d\alpha}{dx}\frac{e^2}{2}.$$

Faisant intervenir la formule (3), il vient encore

$$V = 4\pi\frac{\delta}{K}\frac{\Gamma}{I}\frac{e^2}{2},$$

I, facile à évaluer en fonction de e et de l, conduit finalement à

$$V = 3\pi \frac{\delta}{K} \Gamma \frac{1}{le} \qquad \left(I = 2l\frac{e^3}{3}\right) \tag{5}$$

Exemple : Une poutre bilame de longueur L_0 est encastrée à une extrémité, l'autre étant soumise à une force normale F (*fig.* 3). En tout point d'abscisse x,

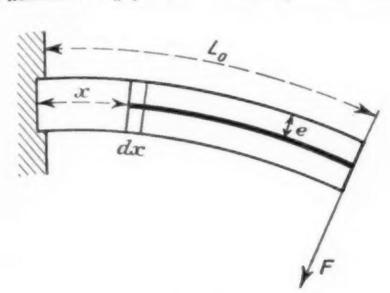


Fig. 3.

le moment du couple des forces exercées sur sa droite est

$$\Gamma_x = F(L_0 - x).$$

Un élément dx situé au voisinage du point fixe d'abscisse O est donc le siège d'une tension

$$V_0 = 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{L_0}{le} F \tag{6}$$

créée par l'action du couple $\Gamma_0 = FL_0$.

Au contraire, un élément dx pris à l'extrémité libre d'abscisse L_0 n'est le siège d'aucune tension ($\Gamma_{L_0} = 0$).

4. FORCE ÉLECTROMOTRICE RÉSULTANTE ET CHARGES RÉSULTANTES.

4.1. Supposons que nous métallisions la totalité de la fibre neutre et des faces supérieure et inférieure de la poutre, de manière à constituer un bilame de forme rectangulaire classique.

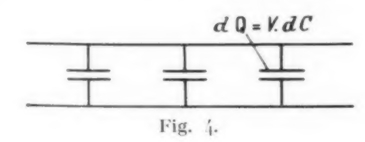


Fig. 4.

A la tension V de l'élément de lame d'abscisse x, de longueur dx, d'épaisseur e, de largeur l, correspond une charge dQ telle que dQ = V dC, où dC est la capacité du condensateur constituant l'élément envisagé (*fig.* 4).

Tous ces condensateurs élémentaires constituant la lame étant mis en parallèle, la charge totale Q se répartit sur le condensateur total $C_{\mathrm{d}x}$ et lui communique la tension V' telle que

$$V' = \frac{Q}{C_0} = \frac{1}{C_0}\int_0^{C_0} V\,\mathrm{d}C, \qquad \mathrm{d}C = \frac{Kl\,\mathrm{d}x}{4\pi e},$$

$$V' = \frac{1}{L_0}\int_0^{L_0} V\,\mathrm{d}x = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{1}{L_0 le}\int_0^{L_0}\Gamma\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas de la poutre encastrée étudiée précédemment,

$$\int_0^{L_0} F(L_0 - x)\,\mathrm{d}x = F\frac{L_0^2}{2}$$

et

$$V_1 = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{L_0}{le}\,\frac{F}{2}. \tag{7}$$

Cette tension V_1 n'est que la moitié de V_0, tension de l'élément d'abscisse O, donnée par la formule (6) : mais l'impédance interne des deux éléments n'est pas la même; nous y reviendrons.

4.2. Un raisonnement identique est applicable, au signe près, à la moitié inférieure de la poutre.

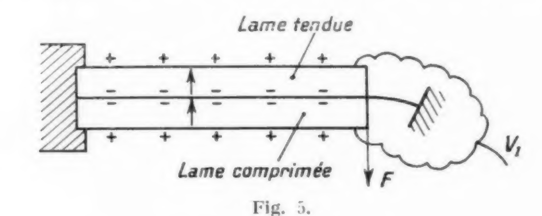


Fig. 5.

Selon le sens de la polarisation de cette moitié, ou selon le sens des connexions, il est ainsi possible d'avoir deux générateurs montés en série ou en

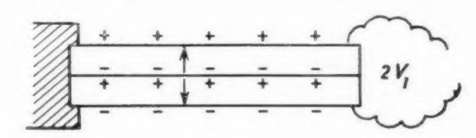


Fig. 6.

parallèle avec application des lois classiques sur les groupements (*fig.* 5 et 6).

Exemple 1. — *Axes électriques des deux lames du bilame orientés dans le même sens.*

Les faces extérieures sont au même potentiel V_1 par rapport à la fibre neutre à la masse.

On les monte en parallèle.

Exemple 2. — *Axes électriques orientés en sens inverse.*

Les tensions sur les faces extérieures sont de signe contraire.

On les monte en série, la tension obtenue est $2V_1$.

Il ne faut pas oublier que l'impédance interne n'est pas la même dans chaque cas.

4.3. Il est quelquefois utile d'exprimer les tensions et les charges en fonction non des forces, mais des déplacements des extrémités du bilame.

La flèche h d'un tel bilame est donnée par la relation

$$h = \frac{FL_0^3}{3EI},$$

ce qui, porté dans les formules (6) et (7), donne, après simplification,

$$V_0 = 6\pi \frac{\delta}{K} \frac{Ee^2}{L_0^2} h$$

et

$$V_1 = 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{Ee^2}{L_0^2} h = \frac{V_0}{2}.$$

De ce fait, la charge portée par un élément de largeur dx situé près du point d'abscisse O a pour valeur, après multiplication de V_0 par C_{dx} et simplification,

$$(8) \qquad Q_{dx\ \text{pour}\ x=0} = 3\delta \frac{Ele\,dx}{2L_0^2} h.$$

De même, la charge totale portée par une armature du bilame est

$$(9) \qquad Q_{\text{total}} = \frac{3}{4} \frac{\delta Ele}{L_0} h.$$

5. ÉQUATIONS DU TRANSFORMATEUR ÉLECTROMAGNÉTIQUE, IMAGE D'UN MICROPHONE PIÉZOÉLECTRIQUE.

Il est connu que, pour des raisons de robustesse, d'encombrement, de non-directivité, un tel microphone doit posséder une membrane bien sertie.

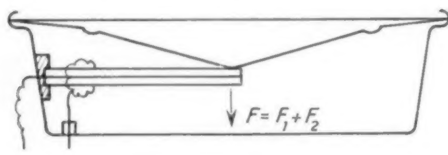


Fig. 7.

Il est donc du type dit à « élasticité prépondérante ». Il est à ce moment-là en fonctionnement du type « sensible à la pression » et c'est la composante « déplacement » qui doit créer le phénomène électrique, car il est le seul proportionnel à la pression acoustique et indépendant de la fréquence tant qu'on reste loin en dessous de la fréquence de résonance propre (*fig.* 7).

5.1. Équation mécanique.

Supposons la membrane (m_1, r_1, s_1) parfaitement solidaire de l'extrémité du bilame (m_2, r_2, s_2). Toute force F appuyant sur la membrane peut se décomposer en une force F_1 dont le rôle est de déformer seulement la membrane et une force F_2 dont le rôle est de déformer le bilame et de créer une charge électrique sur les lames. D'où les équations

$$F = F_1 + F_2,$$

$$F_1 = m_1 \frac{d^2h}{dt^2} + r_1 \frac{dh}{dt} + s_1 h,$$

$$F_2 = m_2 \frac{d^2h}{dt^2} + r_2 \frac{dh}{dt} + s_2 h + Aq.$$

A est la constante piézoélectrique du bilame.

F peut donc se mettre sous la forme

$$(10) \qquad F = m \frac{d^2h}{dt^2} + r \frac{dh}{dt} + sh + Aq,$$

avec

$$m = m_1 + m_2, \ldots.$$

5.2. Équation électrique.

La charge q produite par l'élément se répartit sur l'élément piézoélectrique, sur les armatures du

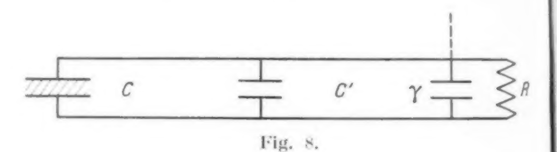


Fig. 8.

câble de liaison à l'amplificateur, sur la capacité d'entrée de la lampe γ, et elle s'écoule à travers la résistance de fuite R de la grille (*fig.* 8).

L'équation électrique s'écrit donc

$$(11) \qquad R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_0} + A'h = 0$$

avec

$$C_0 = C + C' + \gamma$$

et où A' est le coefficient piézoélectrique.

On démontre que les coefficients A et A' sont opposés. En effet, mettons-nous en circuit ouvert et supposons appliquées une force constante F sur

la membrane du microphone et une f. é. m. E dans le circuit.

Les équations sont alors à l'équilibre :

$$F = sh + Aq$$

(avec Aq petit devant sh)

$$E = \frac{q}{C_0} + A'h.$$

Exerçons un léger supplément de force F de manière à produire, selon un mode réversible, un léger déplacement $\mathrm{d}h$ et une légère croissance de charge $\mathrm{d}q$.

L'énergie produite par la force est égale à $F\,\mathrm{d}h$.

Mais la f. é. m. E reçoit la charge $\mathrm{d}q$ et produit le travail $-E\,\mathrm{d}q$. Au total, le milieu extérieur a produit le travail

$$\mathrm{d}\mathcal{T} = F\,\mathrm{d}h - E\,\mathrm{d}q.$$

Écrivons que l'opération est réversible

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{\partial E}{\partial h}, \qquad \text{d'où} \qquad A = -A'.$$

5.3. **Calcul du coefficient** A.

Si l'on est à l'équilibre, en circuit ouvert, :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Les équations (10) et (11) s'écrivent

$$F = sh + Aq,$$

$$0 = \frac{q}{C_0} - Ah, \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{1}{C_0}\,\frac{q}{h}.$$

Or les relations (8) et (9) donnent une valeur de q en fonction de h, du type $q = Bh$, où B est une constante dépendant des dimensions, des groupements, des positions des métallisations du bilame.

D'où nous tirons

$$A = \frac{B}{C_0}$$

et les équations (10) et (11) s'écrivent

$$(12) \qquad F = m\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + sh + \frac{B}{C_0}q,$$

$$(13) \qquad 0 = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C_0} - \frac{B}{C_0}h.$$

5.4. **Régime oscillant.**

La force F prend la forme $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$.

Exprimons h et q en fonction de leurs dérivées

$$\text{vitesse :} \quad v = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \text{intensité :} \quad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

$$v = \mathcal{V}_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}, \qquad i = \mathcal{J}\,\mathrm{e}^{j\omega t}.$$

Les équations (12) et (13) s'écrivent alors

$$\mathcal{F}_0 = \left[r + j\left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right)\right]v - \frac{jB}{C_0\omega}\mathcal{J},$$

$$0 = \left(R - \frac{j}{C_0\omega}\right)\mathcal{J} + \frac{jB}{C_0\omega}v$$

et sont de la forme

$$\mathcal{F}_0 = \quad Z_1 v + A\mathcal{J},$$

$$0 = -\,A\,v + Z_2\mathcal{J}.$$

Éliminons v entre les deux équations

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{J}\left(A + \frac{Z_1 Z_2}{A}\right)$$

et la tension aux bornes d'entrée de la grille devient

$$(14) \qquad V = R\mathcal{J} = \frac{R\mathcal{F}_0}{A + \dfrac{Z_1 Z_2}{A}}.$$

Le coefficient de transformation entre V et $\mathcal{F}_0$ s'écrit

$$\mathcal{H} = \frac{AR}{A^2 + Z_1 Z_2}$$

ou encore

$$\mathcal{H} = \frac{\dfrac{jBR}{C_0\omega}}{\dfrac{B^2}{C_0^2\omega^2} - \left[r + j\left(m\omega - \dfrac{s}{\omega}\right)\right]\left[R - \dfrac{j}{C_0\omega}\right]}.$$

Comme nous sommes en « élasticité prépondérante », r et $m\omega$ doivent être petits devant $\frac{s}{\omega}$ et le coefficient devient

$$\mathcal{H} = \frac{jBRC_0\omega}{C_0 s + B^2 + jC_0^2 s\omega R}.$$

L'évaluation numérique de B, dans les cas normaux, montre que le terme B^2 est négligeable devant $C_0 s$.

Le coefficient devient alors

$$\mathcal{H} = \frac{jBR\omega}{s(1 + jC_0\omega R)}$$

dont le module a pour valeur

$$H = \frac{BR\omega}{s\sqrt{1 + C_0^2\omega^2 R^2}}.$$

Dans les cas les plus courants, R est grand (1 MΩ), C_0 vaut environ 1000 pF. Prenons $f = 1000$ c/s.

Dans ces conditions, le terme $C_0^2\omega^2R^2$ est grand devant 1 et le coefficient H devient

$$H = \frac{B}{sC_0}. \tag{15}$$

6. QUELQUES ASPECTS PRATIQUES DE CE RÉSULTAT DANS LE CAS D'UN BILAME MONTÉ EN PORTE-A-FAUX :

a. L'examen de cette formule montre que, si ω n'est pas très petit (ce qui est motivé par $C_0^2\omega^2R^2 > 1$), le microphone est fidèle : réponse indépendante de la fréquence; ceci est réalisé dès que f est supérieur à 200 c/s par exemple.

b. Cette fidélité est accrue par une résistance de fuite élevée, mais la tension à l'entrée de la grille est indépendante de la valeur de cette résistance.

c. La tension est d'autant plus élevée que la capacité C_0 est plus faible : il y a avantage à avoir des lignes courtes ou de faible capacité. Par exemple, une ligne classique présente une capacité de 1 pF/cm, soit 1000 pF pour 10 m de long. L'emploi d'une telle ligne aux bornes d'un bilame de 1000 pF ferait tomber la tension à la moitié de sa valeur sans câble.

La meilleure valeur de C_0 est évidemment celle du bilame seul.

d. Dans ce cas particulier, la valeur de H peut être directement exprimée en fonction des paramètres dimensionnels de la cellule.

En effet, d'après la formule (8) ou (9),

$$H = \frac{B}{sC_0} = \frac{Q}{h}\cdot\frac{1}{sC_0} = \frac{V}{sh}.$$

Dans le cas où l'élasticité du bilame est prépondérante (membrane flottante), $sh = F_2$, force d'appui sur l'extrémité du bilame.

A ce moment-là, $H = \frac{V}{F_2}$ et H est identique au coefficient de F dans les formules (6) et (7)

$$\frac{V_0}{F} = H_0 = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{L_0}{le}, \qquad \frac{V_1}{F} = H_1 = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{L_0}{2le}. \tag{16}$$

e. Ces expressions montrent que le bilame est d'autant plus sensible sous une force donnée :

— qu'il est plus long (L_0 au numérateur);

— que son épaisseur est plus petite (e au dénominateur);

— qu'il est plus étroit (l au dénominateur).

On n'est limité dans cette direction que par la fréquence de résonance propre, ω_0, qui doit être très élevée (> 10 000 c/s) et par la fragilité de la pièce ou les difficultés de réalisation.

f. Essayons d'évaluer numériquement le coefficient H_0 :

δ, module piézoélectrique = 200.10^{-8};
K = 1200;
L_0 = 1,5 cm;
l = 0,3 cm;
e = 0,02 cm.

Dans ces conditions, pour une bande étroite peinte sur une lame au voisinage du point d'ancrage,

$$H_0 = 0,4.10^{-5}\ \text{C. G. S.} \quad \text{ou} \quad 12.10^{-4}\ \text{V/dyne}.$$

Pour une pression sonore de 100 baryes sur un diaphragme de 7 cm² de surface, cela correspond à une tension de 0,8 V.

Dans le cas d'une métallisation complète, la tension serait seulement égale à la moitié $\left(H_1 = \frac{H_0}{2}\right)$.

7. APPLICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS AU CHOIX D'UN TYPE DE MONTAGE DES BILAMES RECTANGULAIRES.

7.1. Bilame en porte-à-faux (*fig.* 9) : poutre encastrée à une extrémité.

Soit une membrane de rayon L_0.

Elle transmet la force F à l'extrémité du bilame.

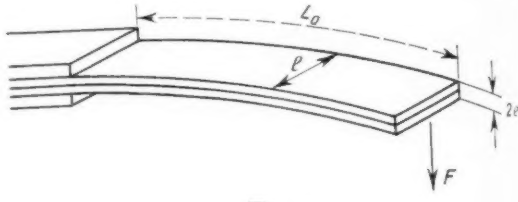


Fig. 9.

Pour une face entièrement argentée, la tension est, dans ces conditions,

$$V_1 = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{L_0}{2le}F$$

de la forme

$$V_1 = AF,$$

la capacité interne étant

$$C_1 = A'L_0.$$

Pour une zone de largeur dx, située au voisinage

du point d'amarrage, la tension est

$$V_0 = 2AF,$$

la capacité interne étant

$$C_0 = A' \,\mathrm{d}x.$$

Si les deux lames composantes sont montées en parallèle, la tension V' ne change pas, la capacité C' interne double.

Si les deux lames sont montées en série, la tension V'' est doublée, la capacité interne C'' est divisée par deux.

En définitive, les tensions et capacités limites sont

$$V' = AF, \qquad C' = 2A'L_0,$$

$$V'' = 4AF, \qquad C'' = \frac{A'}{2}\,\mathrm{d}x.$$

7.2. **Bilame reposant sur deux appuis** (*fig.* 10).

Il est attaqué en son centre par la force F. La longueur du bilame est $2L_0$.

Dans le cas d'une métallisation complète, tout se passe comme si nous avions deux bilames identiques

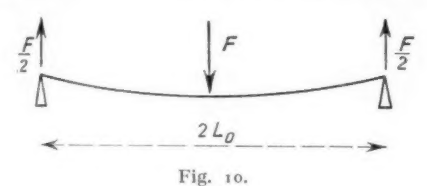


Fig. 10.

au précédent, montés en parallèle, de longueur L_0 et attaqués chacun par seulement $\frac{F}{2}$.

Dans ces conditions, la tension développée (lames composantes en parallèle) est

$$V'_1 = \frac{AF}{2}, \qquad C'_1 = 4A'L_0.$$

Les zones dx à tensions les plus élevées se trouvent au voisinage du point d'attaque de F. En exécutant ainsi quatre plages montées en série, la tension par plage étant $2 \times \frac{AF}{2} = AF$ pour une capacité $A'\,\mathrm{d}x$, la tension totale sera

$$V'' = 4AF, \qquad C''_1 = \frac{A'}{4}\,\mathrm{d}x.$$

7.3. **Bilame encastré aux deux extrémités** (*fig.* 11).

Argentons la surface comprise entre les deux points d'inflexion.

Tout se passe comme si nous avions un bilame de type 7.2, de longueur totale L_0 attaqué à ses extrémités par $\frac{F}{2}$.

Il est, en outre, normal d'utiliser les parties voisines des extrémités encastrées, de longueur $\frac{L_0}{2}$, soumises à $\frac{F}{2}$.

Montons en parallèle les quatre bilames ainsi

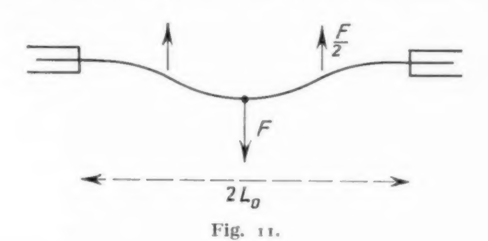


Fig. 11.

constitués, en tenant compte du sens des connexions montées d'une manière convenable.

Chaque bilame engendre une tension égale à $\frac{AF}{4}$ pour une capacité de

$$2A'\frac{L_0}{2} = A'L_0.$$

La tension totale fournie est donc

$$V'_2 = \frac{AF}{4}, \qquad C'_2 = 4A'L_0.$$

Les zones dx à tension la plus élevée sont au voisinage du centre d'attaque et des points d'ancrage.

Exécutons ainsi huit plages et montons-les en série, la tension par plage est $\frac{AF}{2}$ pour une capacité $A'\,\mathrm{d}x$.

La tension totale est donc

$$V''_2 = 4AF, \qquad C''_2 = \frac{A}{8}\,\mathrm{d}x.$$

7.4. L'ensemble de ces résultats montre que, lorsqu'on reste dans l'emploi de surfaces totalement métallisées, ou d'une seule plage de largeur dx peinte aux points de courbure maximum, la tension maximum possible est, pour les montages en série, égale à

$$4AF = 12\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{L_0}{2le}\,F,$$

où L_0 est à la fois le rayon de la membrane et la longueur d'un bilame en porte-à-faux logé en dessous.

En revanche, la capacité interne varie selon le type de montage : elle est maximum dans le cas du bilame en porte-à-faux, utilisé en montage parallèle.

Dans tous les cas, le bilame en porte-à-faux est le plus avantageux; il est aussi le plus simple à construire : c'est donc lui qui doit être retenu.

8. CAS D'UNE SURFACE MÉTALLISÉE DE LONGUEUR QUELCONQUE DESSINÉE A LA SURFACE D'UN BILAME RECTANGULAIRE (*fig.* 12).

Nous n'avons jusqu'ici envisagé que deux cas limites. Il peut être intéressant de voir ce qui se

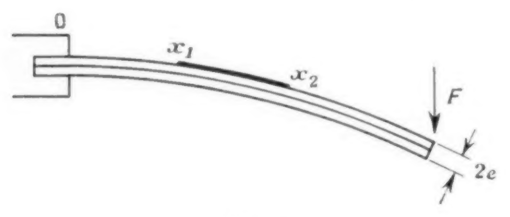


Fig. 12.

passe dans le cas d'une bande limitée à deux arêtes d'abscisse x_1, x_2.

Utilisons la formule (5) du paragraphe 3 qui donne la tension pour une bande de largeur dx, où le couple des forces extérieures est Γ :

$$V = 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{\Gamma}{le}.$$

Pour un point d'abscisse x, $\Gamma = F\,(L_0 - x)$ et

$$V = 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{1}{le} (L_0 - x)\,F.$$

La capacité de cette bande étant dC, écrivons que les charges créées sont réparties à la surface du condensateur limité aux bandes d'abscisses x_1, x_2

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} V_{12} &= \frac{1}{C_{12}} \int_{x_1}^{x_2} V\,\mathrm{d}C \\ &= 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{F}{le(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} (L_0 - x)\,\mathrm{d}x, \\ V_{12} &= 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{1}{le} \left(L_0 - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) F. \end{aligned} \right.$$

En faisant $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ d'une part et $x_1 = 0$, $x_2 = L_0$ d'autre part, on retrouve les formules (6) et (7).

En faisant $x_1 = 0$ et en laissant varier x_2 de 0 à L_0, la courbe (*fig.* 13) représentant la fonction

$$V_x = 3\pi \frac{\delta}{K} \frac{1}{le} \left(L_0 - \frac{x}{2} \right) F$$

est une droite.

La capacité interne est

$$C_x = K \frac{lx}{4\pi e}.$$

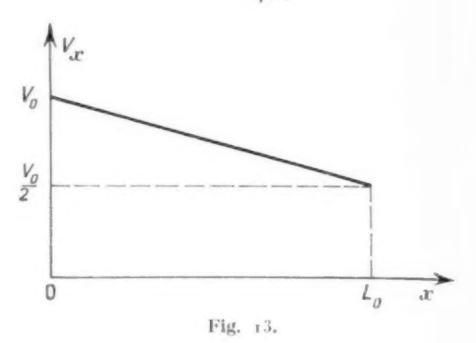


Fig. 13.

L'énergie emmagasinée,

$$W = \frac{1}{2} C_x V_x^2$$

est maximum pour $x = L_0$, c'est-à-dire quand toute la surface est argentée.

9. CAS D'UN BILAME NON RECTANGULAIRE.

Afin de préciser les résultats, nous allons examiner le cas d'un bilame reposant sur deux appuis, attaqué par F en son milieu, et ayant la forme d'un losange

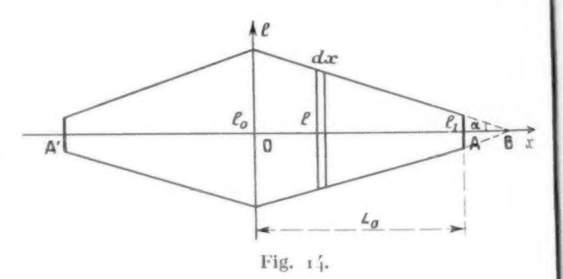


Fig. 14.

tronqué de demi-angle au sommet α, de longueur $2L_0$, de largeur maximum l_0, de largeur minimum l_1 (*fig.* 14).

Soit une bande d'abscisse x et de largeur

$$l = l_0 - \frac{l_0 - l_1}{L_0} x = l_0 - x \operatorname{tg} \alpha.$$

La force d'attaque F appliquée en O équivaut à deux forces $\frac{F}{2}$ attaquant les extrémités A et A'. Le couple appliqué sur la bande d'abscisse x est

$$\Gamma = \frac{F}{2}(L_0 - x)$$

et la tension produite sur cette bande est

$$(18)\quad V = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{F}{2e}\,\frac{L_0 - x}{l} = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{F}{2e}\,\frac{L_0 - x}{l_0 - x\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

La courbe représentative de $V = f(x)$ est une hyperbole (*fig.* 15) et montre que V est maximum

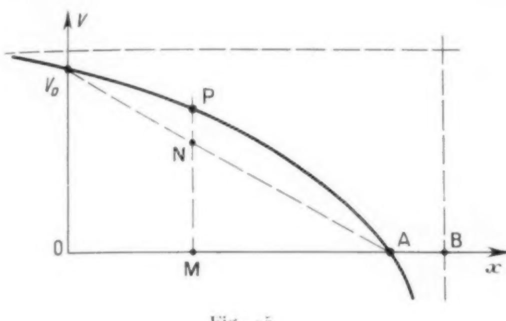


Fig. 15.

pour $x = 0$, comme il fallait s'y attendre. Sa valeur est

$$V_0 = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{L_0}{2el_0}\,F \quad [\text{form. } (6)].$$

Si le bilame avait partout la largeur l_0, une bande dx d'abscisse x aurait pour tension la valeur figurée en MN.

Dans le cas du bilame losange, la valeur de V est supérieure, elle est MP, mais il suffit de diminuer l_0

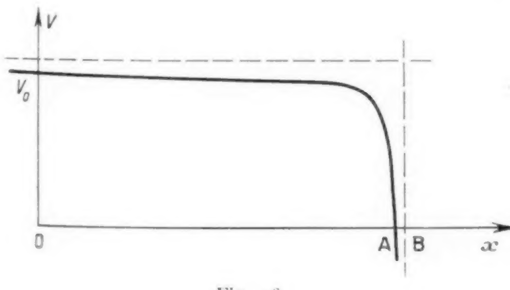


Fig. 16.

pour augmenter encore V. C'est pourquoi l'emploi d'un losange tronqué ne nous paraît pas avantageux.

Cependant, si le point A coïncide presque avec B (losange presque parfait), le rapport

$$\frac{L_0 - x}{l_0 - x\,\mathrm{tg}\,\alpha} \quad \text{devient} \quad \frac{L_0 - x}{l_0 - \frac{x}{L_0}\,l_0} \neq \frac{L_0}{l_0}$$

et la tension est quasi indépendante de x.

La courbe représentative est la suivante (*fig.* 16).

La constance de V dans un domaine assez étendu fait quelquefois utiliser ce type de montage.

Cet exemple de calcul peut être étendu à d'autres formes de bilame.

10. INFLUENCE DES ÉPAISSEURS DES COUCHES EFFECTIVEMENT PIÉZOÉLECTRIQUES.

Supposons un élément piézoélectrique monté en trilame, dont la lame médiane est conductrice et d'épaisseur non négligeable $2y_0$, les lames extérieures étant piézoélectriques (*fig.* 17). L'épaisseur totale est $2e$.

Pour simplifier nous supposons que les deux matériaux ont le même module d'Young E.

La formule élémentaire (4) relative à une tranche d'épaisseur dy et d'ordonnée y est toujours valable.

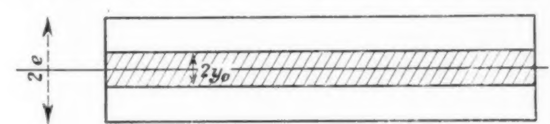


Fig. 17.

La tension produite par la lame de diélectrique d'épaisseur $e - y_0$ est donc

$$V = 4\pi\frac{\delta}{K}\,E\,\frac{d\alpha}{dx}\int_{y_0}^{e} y\,dy = 4\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{\Gamma}{I}\,\frac{e^2 - y_0^2}{2}$$

ou encore

$$(19)\quad V = 3\pi\frac{\delta}{K}\,\frac{\Gamma}{le}\left(1 - \frac{y_0^2}{e^2}\right).$$

La formule (19) fait apparaître le facteur correctif $1 - \frac{y_0^2}{e^2}$ de la formule (5).

Elle montre qu'il y a intérêt à prendre l'épaisseur $2y_0$ de la lame médiane la plus faible possible, mais, si y_0 reste petit, V varie peu en fonction de y_0 (formule parabolique).

11. MEMBRANE CIRCULAIRE, POSÉE SUR SES BORDS ET SOUMISE A UNE FORCE NORMALE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE (égale à p).

11.1. C'est le cas d'un disque mince, d'épaisseur $2e$, soumis à une pression (membrane de micro-

phone) (*fig.* 18). Nous supposons dans tout ce qui suit que le déplacement x de chaque point de la lame est petit devant la distance de ce point au

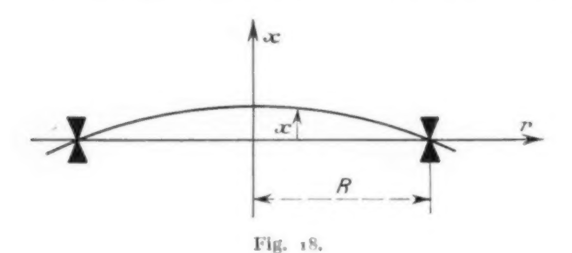


Fig. 18.

centre du disque. Soit R le rayon de la circonférence d'appui de la membrane.

L'équation du méridien de la membrane est

$$(20) \quad x = \frac{3p}{128 A e^3}\left[(r^4 - R^4) - 2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}R^2(r^2 - R^2)\right],$$

où

$$A = \frac{E}{1-\sigma^2} \quad (^2),$$

E, module d'élasticité et σ, coefficient de Poisson.

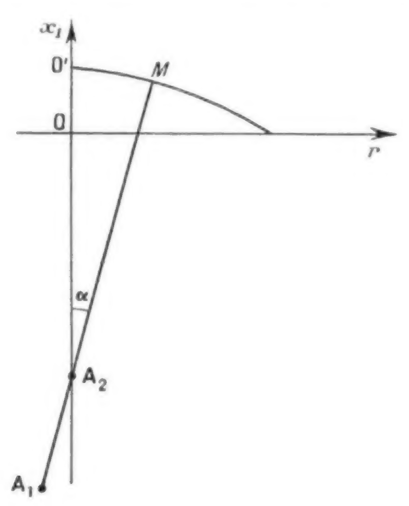


Fig. 19.

Les lignes de courbure principales sont, par raison de symétrie, les rayons (méridiens) et les cercles de centre O (parallèles). La surface fléchie étant de révolution, les rayons de courbure en un point M sont (*fig.* 19) :

— D'une part, le rayon $\rho_1 = A_1M$, rayon de courbure du méridien tel que

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d^2x}{dr_2};$$

— D'autre part, le rayon $\rho_2 = A_2M$, le point A_2 se trouvant sur l'axe. Comme $O'M = r$ et que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dx}{dr} = \alpha$,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r}\frac{dx}{dr}.$$

Découpons autour du point M une surface unité infiniment petite, ayant la forme d'un rectangle

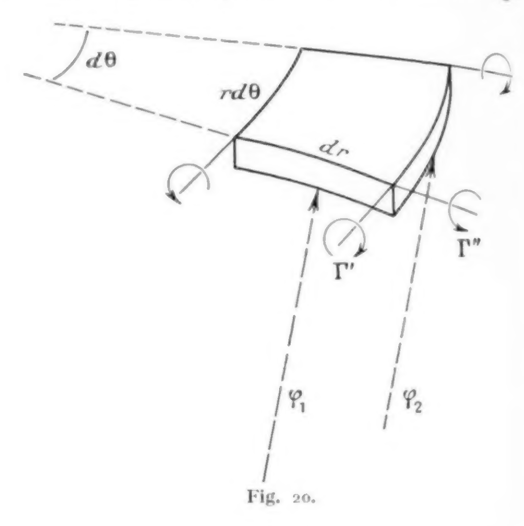


Fig. 20.

limité par les lignes principales de courbure. Les dimensions de ce rectangle sont (*fig.* 20) : $r\,d\theta$, dr.

Ce rectangle est doublement fléchi, selon les rayons de courbure, ρ_1 (pour les lignes parallèles à dr) et ρ_2 (pour les lignes parallèles à $r\,d\theta$).

Pour maintenir les flexions ainsi définies l'élément de surface, détaché de l'ensemble de la membrane, doit être soumis à deux couples Γ' et Γ''.

Le couple Γ' « dit tangentiel » d'axe parallèle aux côtés $r\,d\theta$, correspond à la courbure $\frac{1}{\rho_1}$, et le couple Γ'' « dit radial » d'axe parallèle aux côtés dr, correspond à la courbure $\frac{1}{\rho_2}$. La théorie de la déformation des plaques indique d'ailleurs que

$$\Gamma' = n' r\,d\theta, \qquad \text{où} \quad n' = \frac{2e^3}{3}\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{d^2x}{dr^2} + \sigma\frac{1}{r}\frac{dx}{dr}\right),$$

$$\Gamma'' = n''\,dr, \qquad \text{où} \quad n'' = \frac{2e^3}{3}\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\sigma\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dx}{dr}\right).$$

---

[2] Pour l'établissement des formules de ce chapitre, consulter :

H. Bouasse, *Théorie de l'élasticité.*

H. Bouasse, *Verges, plaques, cloches et carillons*, chap. VIII.

11.2. Supposons maintenant que la membrane circulaire soit en réalité un bilame d'épaisseur $2e$ formé de deux membranes circulaires piézoélectriques d'épaisseur e dont la surface commune est métallisée, les faces extérieures étant métallisées selon des zones de largeur variable (*fig.* 21).

Une tranche d'ordonnée y d'épaisseur dy, découpée dans la lame supérieure parallèlement aux faces est

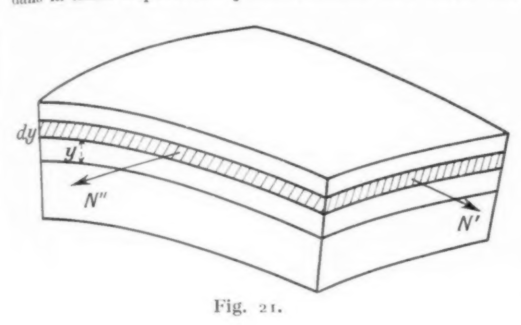


Fig. 21.

soumise à deux ensembles de forces unitaires N' et N'', et il apparaît de ce fait, une densité de charges électriques

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

telle que

$$\sigma = \delta(N' + N'').$$

Cette charge provoque la tension

$$dV = \frac{\sigma}{C} = \frac{\delta(N' + N'')\,4\pi\,dy}{K \times 1\ \mathrm{cm}^2}.$$

En outre, les forces unitaires N' et N'' sont reliées aux courbures de l'élément de surface, de telle sorte que

$$N' = Ey\frac{1}{\rho_1}, \qquad N'' = Ey\frac{1}{\rho_2}.$$

La tension dV prend la forme

$$dV = 4\pi\frac{\delta}{K}E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)y\,dy. \tag{21}$$

La formule (21) a la même structure que la formule (4) du paragraphe 3.

Nous écrivons de même que la tension, étendue à toute l'épaisseur de la lame devient

$$V = 4\pi\frac{\delta}{K}E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{e^2}{2}.$$

La formule (20) permet de calculer $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ en fonction de r et, après simplification, on obtient

$$V = \frac{\pi}{8}\frac{\delta}{K}3p\left(\frac{1-\sigma^2}{e}\right)\left(2r^2 - \frac{3+\sigma}{1+\sigma}R^2\right).$$

Comme σ est petit (égal à 0,2 pour la céramique bien vitrifiée), la formule précédente se simplifie selon

$$V = \frac{3\pi}{8}\frac{\delta}{K}\frac{(2r^2 - 3R^2)}{e}p. \tag{22}$$

Cette formule est l'équivalente de la formule (5).

On y voit que la tension est la même pour tous les points d'une même circonférence, qu'elle est maximum en valeur absolue au centre de la membrure, qu'elle n'est pas tout à fait nulle sur la circonférence d'appui car il existe en ces points une courbure $\frac{1}{\rho_2}$ non nulle.

11.3. Afin de juger de l'efficacité de ce montage, calculons la tension pour une métallisation circulaire de rayon très petit peinte au centre de la membrane. La tension V_0 est donnée, à partir de la formule (22), en faisant

$$p = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{F}{\pi L_0^2}, \qquad r = 0, \qquad R = L_0.$$

On trouve

$$V_0 = \frac{9\delta}{8K}\frac{F}{e}. \tag{23}$$

Cette formule est à comparer avec la formule (6), on s'aperçoit ainsi que la tension produite au voisinage du point d'ancrage du bilame rectangulaire en porte-à-faux est plus élevée que la tension de la formule (23), dans le rapport approximatif

$$8\frac{L_0}{l}.$$

11.4. Calculons maintenant la tension produite par une métallisation complète de rayon $r = R = L_0$.

La tension est

$$V_1 = \frac{1}{C}\int_0^R V\,dC,$$

où C est la capacité du condensateur circulaire constitué par une lame de rayon L_0

$$C = \frac{K\pi L_0^2}{4\pi e} = \frac{KL_0^2}{4e}.$$

V est la tension produite en tout point d'un cercle de rayon r et est donnée par la formule (22).

dC est la capacité d'une zone de rayon r et de largeur dr

$$dC = \frac{K\,2\pi r\,dr}{4\pi e} = \frac{K}{2e}r\,dr.$$

On trouve, après intégration et simplification,

$$V_1 = \frac{3}{4}\,\frac{\delta}{K}\,\frac{F}{e}. \tag{24}$$

la tension V_0, au centre du diaphragme, est les $\frac{3}{2}$ de la tension produite sur la métallisation complète de la lame circulaire. La formule (24) est à comparer à la formule (7). La tension V_1 [form. (7)] est $2\pi\frac{L_0}{l}$ fois plus grande que la tension V_1 [form. (24)], mais la capacité est $\frac{L_0}{l}$ fois plus petite.

11.5. En conclusion, un bilame circulaire piézoélectrique peut fonctionner en générateur de tension, mais il est, à épaisseur égale, bien moins avantageux que le bilame rectangulaire attaqué par une membrane métallique circulaire de même rayon.

Toutefois, on pourra améliorer les tensions produites par le bilame circulaire en diminuant l'épaisseur des lames composantes (peinture) et en montant en série plusieurs métallisations en forme d'anneau.

CONCLUSION.

Pour qui pense aux céramiques piézoélectriques, un microphone à pression extrêmement simple semble pouvoir être constitué par deux disques minces, assemblés en bilame et jouant eux-mêmes le rôle de membrane. Le calcul précédent montre que la force électromotrice ainsi produite est moins avantageuse que dans le cas du système classique cône métallique-bilame rectangulaire; en outre, l'impédance interne est faible (grande capacité du bilame) et ceci est défavorable au rendement de la transmission par câble long.

Revenant donc au bilame classique, la question se pose de savoir quel est le type de montage le plus intéressant. Il est difficile de répondre d'une manière universelle à cette question car chacun des montages examinés doit être étudié en fonction des organes d'utilisation de la tension produite (câble, résistance d'entrée des lampes ou des transistors). On peut cependant dire que le bilame rectangulaire mince, étroit et long, monté en porte-à-faux, est à retenir de préférence, par suite des tensions élevées qu'il engendre et de son impédance interne élevée et de l'extrême facilité de pouvoir modifier celle-ci dans des rapports de quelques unités à quelques dizaines d'unités par des dessins convenables de métallisation et des sens convenables de polarisation du diélectrique. Le lecteur se rapportera au texte pour combiner ces éléments sans oublier bien entendu que, somme toute, l'énergie électrique dont il disposera ne variera d'un montage à l'autre que dans un rapport de quelques unités.

LES SERVOMÉCANISMES DANS LES CALCULATEURS ANALOGIQUES (¹)

Par R. GENDREU,

Département « Calculateurs »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

PREMIÈRE PARTIE.

Sommaire. — *Cet article a pour but de donner un aperçu sur l'utilisation des servomécanismes dans les calculateurs analogiques haute fréquence C. S. F.* (²).
Dans cette première partie, l'auteur présente des notions pratiques importantes permettant de déterminer rapidement la contribution des servomécanismes à la précision des calculs en s'appuyant sur un exemple classique : transmission d'une position angulaire par selsyn. Dans la deuxième partie, il utilisera ces notions pour les deux opérations : dérivation et intégration, effectuées par servomécanismes en donnant un aperçu sur les performances réalisées. L'étude d'un intégrateur, élément de base des simulateurs, servira dans celle du pilotage présentée dans la troisième partie. (C. D. U. : 621-526 : 681-142.)

Summary. — *The object of this paper is to give a general idea of the application of servo-mechanisms in the C. S. F. high-frequency analogue computers.*
In this first part, the author sets out important practical ideas for the rapid determination of the contribution of servo-mechanisms in the precision of the computation by taking a classical example : transmission of an angular position by means of selsyns.
In part two, he will make use of these ideas for the two operations : differentiation and integration, carried out by servo-mechanisms, and will set out briefly the performance obtained. The study of an integrator, which is the basic component in a simulator, will be applied to the case of " pilotage " presented in part three. (U. D. C. : 621-526 : 681-142.)

INTRODUCTION.

Le principe de la cellule haute fréquence, élément de base du calculateur analogique haute fréquence montre que les différents calculs sont effectués avec une grande précision. Ainsi une multiplication peut être effectuée statiquement avec une précision de l'ordre de 1/5 000e.

Les différentes opérations sont effectuées par des condensateurs variables linéaires ou fonctionnels dont les arbres sont positionnés par des moteurs asynchrones diphasés. Si l'on désire ne pas affecter la précision de l'ensemble, tous les éléments autres que les circuits H. F., c'est-à-dire moteur, mécanique et circuit électronique de la boucle d'asservissement doivent être aussi parfaits que possible.

D'autre part, le servomécanisme doit être simple pour être facile à dépanner et économique. Ces considérations conduisent souvent à choisir le meilleur moteur.

Après un rappel sur les caractéristiques du moteur diphasé d'asservissement, l'étude d'un servomécanisme simple (asservissement en position) nous permettra de préciser les performances du moteur et

---

(¹) Manuscrit reçu le 30 octobre 1956.

(²) *Cf.* H.-J. Uffler, *Note sur un nouveau procédé de calcul par courants de haute fréquence* (*Ann. Radioélectricité*, juillet 1956, p. 187-199).

d'introduire quelques notions pratiques utiles à l'évaluation rapide des erreurs dues aux différentes non-linéarités qu'on rencontre le long d'une boucle d'asservissement.

Les résultats obtenus étant en général applicables à d'autres opérations effectuées par servomécanisme, on étudiera en particulier l'opération de dérivation, puis d'intégration, cette dernière servant de base à la théorie du pilotage.

1. RAPPEL SUR LES CARACTÉRISTIQUES DU MOTEUR ASYNCHRONE DIPHASÉ D'ASSERVISSEMENT.

1.1. A l'heure actuelle, les calculateurs analogiques à servomécanismes utilisant très souvent des moteurs asynchrones diphasés, nous allons rappeler les caractéristiques de ces moteurs. Les notions données ici, sont naturellement applicables aux moteurs présentant des caractéristiques électromécaniques similaires (exemple : moteur à courant continu à excitation séparée commandé par l'induit).

1.2. Caractéristiques électromécaniques du moteur diphasé d'asservissement.

Le moteur asynchrone industriel présente des caractéristiques électromécaniques, couple-vitesse, identiques à celles de la figure 1.

Les tensions polyphasées d'excitation du stator sont supposées constantes et la résistance du rotor est prise comme paramètre. Le couple maximum Γ_M

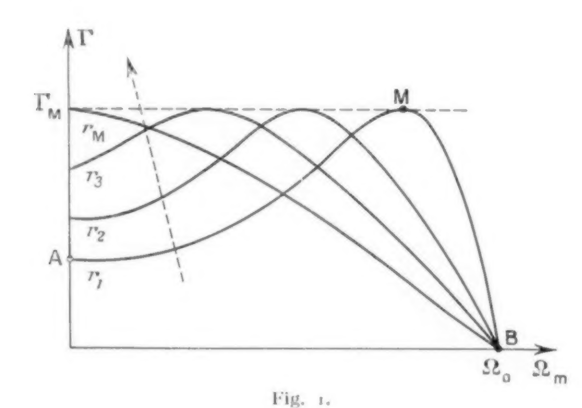


Fig. 1.

est indépendant de cette résistance. Le point M de la courbe correspondant à la résistance rotorique minimum qu'il est possible de réaliser, est le point optimum pour l'utilisateur.

Pratiquement, l'adaptation du moteur à la charge sera faite de façon que le couple résistant Γ_r soit aussi voisin que possible de Γ_M ($\Gamma_r \leq \Gamma_M$).

On vérifie facilement d'autre part que :

— l'arc $\widehat{AM}$ est instable;

— l'arc $\widehat{MB}$ est stable.

Il est possible d'étendre la zone stable à tout l'intervalle $0 < \Omega_m < \Omega_0$ (Ω_0, vitesse de synchro-

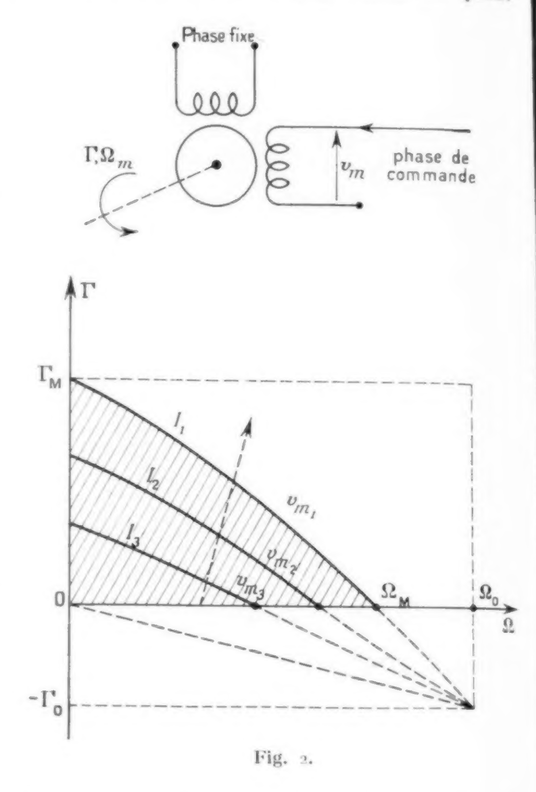


Fig. 2.

nisme) en augmentant la résistance du rotor (valeur r_M).

Industriellement, la caractéristique (r_M) obtenue ne présente plus d'intérêt mais devient éminemment favorable au fonctionnement des moteurs d'asservissement.

Ainsi en appliquant cette technique à un moteur diphasé dont la tension locale est maintenue constante, on obtient en prenant le courant d'excitation de l'autre phase comme paramètre, un faisceau de courbes dont la concavité est tournée vers le bas (*fig.* 2).

Le point de convergence est situé dans le domaine des couples négatifs. Il en résulte que la vitesse

maximum Ω_M est inférieure à la vitesse de synchronisme Ω_0.

Pour l'étude des servomécanismes, on considère Γ comme une fonction linéaire de I et Ω_m, dont les coefficients sont déterminés pour des valeurs évanescentes de I et de Ω_m (voisinage du point O).

Avec cette approximation on a la relation suivante :

$$(1) \qquad \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial I} I + \frac{\partial \Gamma}{\partial \Omega} \Omega_m$$

à laquelle il faut ajouter si l'on tient compte de la constante de temps électrique de l'enroulement de commande

$$(2) \qquad v_m = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Dans ces deux équations et celles qui suivent, les grandeurs électriques représentent le signal utile (enveloppe du signal porteur modulé).

En régime permanent $\left(\frac{dI}{dt} = 0\right)$, on peut substituer au paramètre I le paramètre v_m.

(1) devient

$$(1') \qquad \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial I} \frac{v_m}{R} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \Omega} \Omega_m.$$

En posant

$$(3) \qquad k_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial I} \frac{1}{R},$$

$$(4) \qquad k_2 = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \Omega} \qquad \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Omega} < 0\right).$$

on a

$$(1'') \qquad \Gamma = k_1 v_m - k_2 \Omega_m.$$

Cette relation est seulement valable en régime permanent.

En régime variable, il faut considérer les relations (1) et (2) valables pour des signaux d'entrée de faible amplitude et dont le spectre a une pulsation de coupure ω_c inférieure à la pulsation porteuse ω_0.

Variation des coefficients k_1 *et* k_2. — La théorie du moteur diphasé montre que :

- k_1, gradient de couple-tension est pratiquement constant dans le domaine ombré (*fig.* 2) (v_{m1}, tension correspondant à la saturation du stator).
- k_2, coefficient de frottement dynamique est une fonction croissante du courant de commande I.

Il en résultera généralement que l'étude des conditions de stabilité d'un système asservi utilisant un moteur diphasé devra se faire en utilisant la valeur minimum de k_2 correspondant à des valeurs évanescentes de I et Ω_m.

1.3. **Fonction de transfert du moteur.**

Pour faciliter les mesures, on considère comme grandeur d'entrée, la tension de commande v_m du moteur.

La grandeur de sortie est l'angle θ_m mesuré sur l'arbre, lié à la vitesse par la relation

$$(5) \qquad \theta_m = \int^t \Omega_m \, dt.$$

Les mêmes notations θ_m et v_m désignant les transformées de Laplace, la fonction de transfert du moteur à définir est

$$(6) \qquad M(p) = \frac{\theta_m}{v_m}.$$

Le couple-moteur explicité par la relation (1) est appliqué à un arbre dont la charge est essentiellement le couple d'inertie d'entraînement : $J\frac{d\Omega_m}{dt}$.

J est l'inertie totale mesurée sur l'arbre du moteur.

L'équation du mouvement du moteur est donc

$$(7) \qquad \Gamma = J \frac{d\Omega_m}{dt}.$$

Les mêmes symboles désignant les transformées de Laplace des différentes variables, on a :

De la relation (2) :

$$(8) \qquad I = \frac{v_m}{R + pL} = \frac{v_m}{R} \frac{1}{1 + p\tau_e},$$

où l'on a posé

$$(9) \qquad \tau_e = \frac{L}{R}.$$

En éliminant I dans (1) :

$$\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial I} \frac{1}{R} \frac{v_m}{1 + p\tau_e} - k_2 \Omega_m = k_1 \frac{v_m}{1 + p\tau_e} - k_2 \Omega_m$$

et éliminant ensuite Γ de (7) :

$$k_2 \Omega_m \left(1 + p \frac{J}{k_2}\right) = k_1 \frac{v_m}{1 + p\tau_e}.$$

En posant

$$(10) \qquad \tau_m = \frac{J}{k_2},$$

$$(11) \qquad k = \frac{k_1}{k_2},$$

on a

$$(12) \qquad \frac{\Omega_m}{V_m} = \frac{k}{(1 + p\tau_m)(1 + p\tau_e)}.$$

Et de (5) et (6)

$$M(p) = \frac{\theta_m}{v_m} = \frac{k}{p(1+p\tau_m)(1+p\tau_e)}. \tag{13}$$

Discussion de k et τ_m. — k, gradient de vitesse-tension est une fonction décroissante du courant d'excitation.

En particulier en assimilant le réseau de courbes $\Gamma(\Omega_m, I)$ à un faisceau de droites convergentes au point $(\Omega_0, -\Gamma_0)$, on trouvera

$$\underset{\Gamma=0}{\Omega_m} = \Omega_0 \frac{k_1^0 I}{k_1^0 I + k_2^0 \Omega_0}, \tag{14}$$

avec

$$k_1^0 = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial I}\right)_{\Omega=0},$$
$$k_2^0 = -\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Omega_m}\right)_{I=0}.$$

L'allure de cette courbe (*fig.* 3) est pratiquement vérifiée par l'expérience.

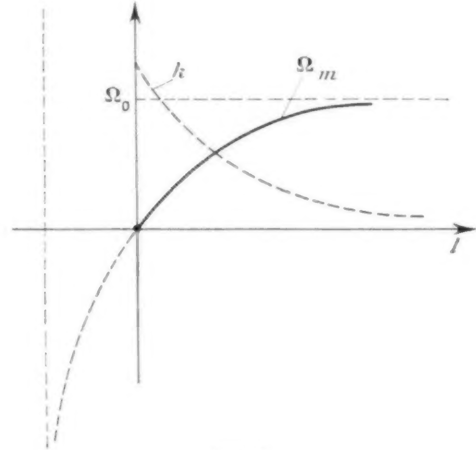


Fig. 3.

Pour l'étude de la stabilité on prendra toujours

$$k_0 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial I}\right)_{I=0} = \frac{k_1^0}{k_2^0} \quad \text{(valeur à niveau faible).} \tag{15}$$

τ_m, constante de temps électromécanique du moteur. — Sa valeur est également calculée à niveau faible. L'allure de sa variation avec I est la même que celle de k.

1.4. Imperfection du moteur.

1.4.1. La précision d'un calcul réalisé par servomécanisme n'est pas seulement limitée par sa vitesse de réponse, mais aussi par un ensemble de perturbations qu'on peut ranger en deux classes :

— des perturbations mécaniques : frottement sec;

— des perturbations électriques : tensions parasites.

Malgré leur diversité, comme nous le verrons par la suite dans l'étude d'un asservissement en position, toutes ces causes d'erreurs produisent en général le même effet, à savoir une erreur Ω_{mp} sur la vitesse du moteur en boucle ouverte. Il sera donc possible de les ramener à cette commune mesure et d'évaluer rapidement la limite supérieure de l'erreur due à tous les éléments perturbants d'une boucle de servomécanisme.

1.4.2. Pour le moteur seul, il faut considérer :

a. un couple de frottement sec Γ_s dont l'origine peut être :

1° mécanique : frottement des paliers;

2° électrique : couple d'encoches pour les moteurs à rotors bobinés (ce couple est nul pour les moteurs à cloche).

Si l'on applique au moteur une tension de commande v_m, le moteur tourne à une vitesse Ω_m définie d'après (1″) en écrivant $\Sigma\Gamma = 0$:

$$k_1 v_m - k_2 \Omega_m - \Gamma_s = 0.$$
$$\Omega_m = k v_m - \frac{\Gamma_s}{k_2}. \tag{16}$$

L'erreur sur la vitesse est

$$\Omega_{ms} = \frac{\Gamma_s}{k_2} \neq \Omega_M \frac{\Gamma_s}{\Gamma_M}. \tag{17}$$

Γ_M et Ω_M couple au démarrage et vitesse maximum à vide mesurés pour la tension maximum sont toujours connus;

b. un couple de dérive Γ_f créé par la non-homogénéité du circuit magnétique ou du rotor (cloche en particulier) se traduisant par une rotation lente du rotor bien que la tension de commande v_m soit nulle. Cet effet est souvent négligeable devant le frottement sec, exception faite pour des moteurs à cloche dont la mécanique est soignée.

L'erreur de vitesse qui en résulte Ω_{mf} est directement mesurable par différence (rotation du moteur dans les deux sens pour une tension d'égale amplitude).

Pour les moteurs à rotor bobiné le couple d'encoches est l'élément parasite dominant. Il en résulte en général un net avantage pour les moteurs à cloche ou similaires (rotor cuivré).

En résumé il est possible d'évaluer rapidement

pour un moteur donné l'erreur de vitesse totale

$$\Omega_{mp} = \sum_{i=1}^{n} \Omega_{mi}.$$

1.5. Unités utilisées. Récapitulation. Applications.

1.5.1. Dans la majorité des cas, les données du moteur, présentées dans le paragraphe précédent, sont suffisantes pour évaluer les performances d'un servomécanisme utilisant ce moteur. Toutefois, de l'étude d'un asservissement en position, on pourra déduire de nouvelles notions déterminantes pour caractériser rapidement les qualités d'un moteur d'asservissement.

1.5.2. Unités utilisées. — Les unités utilisées sont :

a. Mécanique. — Indifféremment le système C.G.S. ou pratique. Les angles seront exprimés en radians ou en tours.

b. Électrique. — Système pratique.

1.5.3. Tableau récapitulatif :

Données et Notations utilisées.		Unités théoriques.	Unités pratiques.
Fréquence d'utilisation	F	c/s	c/s
Nombre de pôles	$2p$		
Dimensions hors tout { longueur / diamètre	L / D	mm	mm
Tension d'alimentation locale	V_l	V	V
Puissance locale	P_l	VA	VA
Tension de commande	e_m	V	V
Impédance signal rotor libre	$Z = X + jY$	Ω	Ω
Puissance maximum de commande	P_M	VA	VA
Couple maximum	Γ_M	dyne × cm	gp × cm
Vitesse maximum	Ω_M	rad/s	t/s
Moment d'inertie du rotor	J	g × cm²	g × cm²
Gradient de couple-tension	k_1	dyne × cm/V	gp × cm/V
Frottement dynamique	k_2	dyne × cm/rad/s	-
Gradient de vitesse-tension	k	rad/s/V	t/s/V
Constante de temps électromécanique	τ_m	s	s
Frottement sec	Ω_{ms}	rad/s	t/s
Dérive	Ω_{mt}	rad/s	t/s
Erreur de vitesse (vitesse parasite)	Ω_{mp}	rad/s	t/s

1.5.4. Application. — A titre d'exemple, appliquons ces résultats au moteur diphasé 50 c/s.

Le tableau de valeurs donné ci-dessous est valable pour un moteur dont l'épaisseur de cloche est 10/100.

Fréquence	$F = 50$ c/s
Nombre de pôles	$2p = 2$
Dimensions hors tout	$L = 120$ mm $D = 117$ mm
Tension d'alimentation locale	$V_l = 220\ V_{\text{eff}}$
Puissance locale	$P_l = 70$ VA
Tension de commande	$0 < v_m < 500$ V
Impédance signal rotor libre	$\lvert Z \rvert = 5\,700\ \Omega$
Puissance maximum de commande	$P_M = 47$ VA
Couple maximum	$\Gamma_M = 7{,}85 . 10^5$ dyne × cm ou 800 gp × cm
Vitesse maximum	$\Omega_M = 188$ rad/s ou 30 t/s
Moment d'inertie du rotor	$J = 10$ g × cm²
Gradient de couple tension	$k_1 = 1{,}67 . 10^3$ dyne × cm/V ou 1,7 gp × cm/V
Frottement dynamique	$k_2 = 2{,}6 . 10^3$ dyne × cm/rad/s ou 16,7 gp × cm/t/s
Gradient de vitesse-tension	$k = 0{,}63$ rad/s/V ou 0,1 t/s/V
Constante de temps électromécanique	$\tau_m = 3{,}8$ ms
Frottement sec	$\Omega_{ms} \leq 0{,}1$ t/s
Dérive	$\Omega_{ml} \leq 0{,}1$ t/s
Erreur vitesse (vitesse parasite)	$\Omega_{mp} \leq 0{,}2$ t/s

2. — ÉTUDE D'UN ASSERVISSEMENT EN POSITION. NOTION DE RETARD DYNAMIQUE. SON IMPORTANCE DANS L'ÉVALUATION DES ERREURS

2.1. Considérons une transmission d'angle effectuée par selsyn (*fig.* 4).

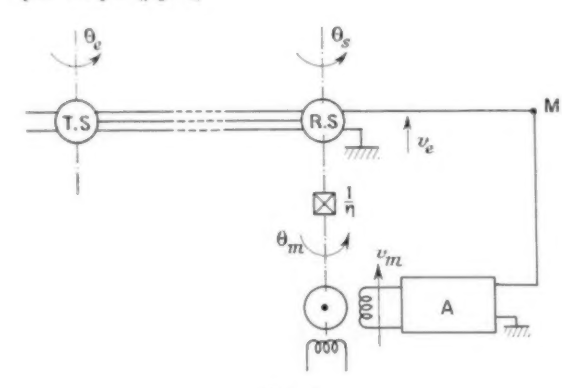


Fig. 4.

2.2. **Notations utilisées.**

On désigne par

θ_e, angle d'entrée : temporelle ou transformée de Laplace;

θ_s, angle de sortie : temporelle ou transformée de Laplace;

$\lambda = \left(\dfrac{dv_e}{d\theta_s}\right)_{v_e=0}$, raideur du récepteur exprimée en volts par radian ou volts par tour;

$A = \dfrac{v_m}{v_e}$, gain en tension de l'amplificateur;

$M = \dfrac{\theta_m}{v_m}$, fonction de transfert du moteur;

$n = \dfrac{\theta_m}{\theta_s}$, rapport de démultiplication moteur-arbre de sortie.

Pratiquement, on élimine la constante de temps électrique τ_e en commandant le moteur par un amplificateur de puissance à pentodes.

Les relations (12) et (13) deviennent

$$(12') \qquad \frac{\Omega_m}{v_m} = \frac{k}{1 + p\,\tau_m},$$

$$(13') \qquad M(p) = \frac{\theta_m}{v_m} = \frac{k}{p(1 + p\,\tau_m)}.$$

2.3. **Fonction de transfert de la boucle ouverte.**

En désignant par T la fonction de transfert de la boucle ouverte, on a immédiatement

$$T(p) = \frac{kA\lambda}{n}\,\frac{1}{p(1 + p\,\tau_m)}.$$

Soit en posant

$$(18) \qquad \mu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{kA\lambda}{n}$$

$$(19) \qquad T = \frac{\mu}{p(1 + p\,\tau_m)} = \frac{1}{p\,\Delta t(1 + p\,\tau_m)},$$

μ a les dimensions de $k\lambda$, c'est-à-dire l'inverse d'un temps.

Δt naturellement homogène à un temps est appelé le retard dynamique. Nous en verrons l'importance ultérieurement.

2.4. **Fonction de transfert globale.**

En désignant par W la fonction de transfert globale, on trouve immédiatement

$$(20) \qquad W(p) = \frac{\theta_s}{\theta_e} = \frac{T}{1 + T},$$

où d'après (19)

$$(20') \qquad W = \frac{1}{1 + p\,\Delta t + p^2\,\tau_m\,\Delta t}.$$

2.5. Étude de la stabilité. Généralités sur le réglage des boucles de servomécanismes.

2.5.1. Dans ce cas simple on voit que le système est toujours stable. En effet l'étude de la boucle ouverte donne

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\omega \Delta t \sqrt{1 + \omega^2 \tau_m^2}}, \tag{21}$$

$$\arg T(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega \tau_m. \tag{22}$$

Les variations de l'amplitude et de la phase dans l'intervalle $0 \leq \omega \leq \infty$ sont données dans le tableau suivant :

ω	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\tau_m}$	$\nearrow$	∞
$\lvert T(j\omega) \rvert$	∞	$\searrow$	$\frac{\tau_m}{\Delta t \sqrt{2}}$	$\searrow$	0
$\arg T(j\omega)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\searrow$	$-\pi$

Aussi faible que soit Δt (résultat obtenu en augmentant par exemple le gain A), le gain de boucle est nul à la fréquence infinie, alors que la phase a tourné de 180°. Le système est donc toujours stable.

Ce résultat peut être obtenu directement en vérifiant que les pôles de $W(p)$ sont toujours à partie réelle négative.

2.5.2. Pratiquement on constatera que le système oscille lorsqu'on diminue suffisamment Δt à cause des constantes de temps secondaires et des retards négligés. Pour les moteurs 50 c/s, la porteuse

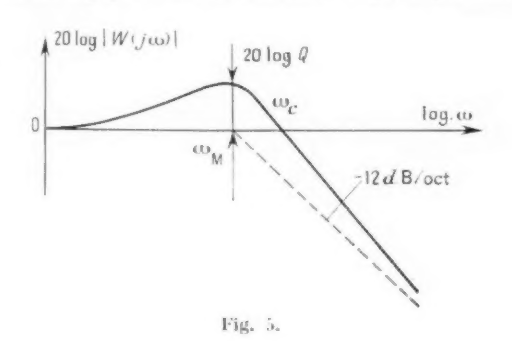


Fig. 5.

est une première limitation; pour les moteurs à porteuse plus élevée (400 c/s par exemple) on vérifie au contraire que la fonction de transfert simplifiée (20') est une très bonne approximation de la réalité.

Dans tous les cas toutefois ce n'est pas la stabilité absolue du système mais comme nous le verrons par la suite la nécessité d'avoir un servomécanisme bien amorti qui limite les performances de l'asservissement.

Pratiquement on admet que la réponse indicielle soit légèrement oscillante, ce qui conduit à donner à Δt une valeur telle que (20') ait des racines imaginaires. Dans ce cas $|W(j\omega)|$ présente un rebondissement que nous désignerons par Q (*fig.* 5).

A chaque valeur de Q correspond une valeur du

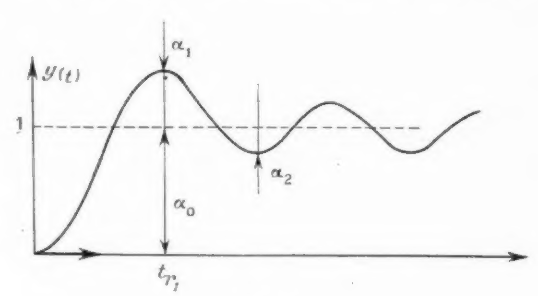


Fig. 6.

décrément logarithmique d de la réponse indicielle $y(t)$ (*fig.* 6)

$$d = \operatorname{Log} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \operatorname{Log} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \ldots \tag{23}$$

Le choix de la valeur de d à adopter est guidé par des considérations expérimentales.

1° Si le temps de réponse (abscisse du 1° maximum) est grand on exige un décrément élevé.

2° Au contraire si le temps de réponse est faible, on tolère un décrément plus faible. On voit que ces considérations conduisent au fait que le décrément peut être imposé par le temps au bout duquel il est nécessaire d'obtenir la grandeur d'entrée avec une précision donnée. Dans les calculateurs analogiques à servomécanismes on veut en général exploiter au maximum les performances du servomécanisme pour éviter autant que possible les réseaux correcteurs qui compliquent le matériel. En conséquence, toutes les fois qu'on dispose d'un moteur à faible constante de temps, on tolère un décrément plus faible.

L'analyse harmonique expérimentale de $|W(j\omega)|$ est toujours facile à réaliser. Il sera donc intéressant de lier sa surtension Q au décrément logarithmique d, de la réponse indicielle.

D'autre part le réglage du gain de la boucle de servomécanisme est subordonné à la connaissance de μ ou Δt d'où l'intérêt de connaître Δt ou plus aisément $\frac{\Delta t}{\tau_m}$ en fonction de Q également.

Ceci fera l'objet des paragraphes suivants.

2.6. Analyse harmonique de $W(j\omega)$.

La relation (20′) donne

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 \tau_m \Delta t + j\omega \Delta t} \tag{24}$$

avec

$$|W| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 \tau_m \Delta t)^2 + \omega^2 \Delta t^2}}, \tag{25}$$

$$\arg W = -\operatorname{arctg} \frac{\omega \Delta t}{1 - \omega^2 \tau_m \Delta t}. \tag{26}$$

2.6.1. Abscisse ω_M du maximum $Q = |W(j\omega)|_{max}$. — On étudie les variations de

$$z = \frac{1}{|W(j\omega)|^2}.$$

La solution de $z'(\omega^2) = 0$ donne

$$\omega_M \tau_m = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}, \tag{27}$$

en posant

$$x = \frac{\Delta t}{\tau_m}. \tag{28}$$

La relation (27) existe si

$$x \leq 2. \tag{29}$$

2.6.2. Valeur du maximum Q. — On trouve

$$Q = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2\tau_m}\sqrt{\frac{4\tau_m}{\Delta t} - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}}. \tag{30}$$

Relation seulement valable si

$$x \leq 2. \tag{29}$$

2.6.3. Bande passante ω_c à 0 dB. — ω_c est solution de

$$|W(j\omega)| = 1,$$

ce qui donne

$$\omega_c \tau_m = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}. \tag{31}$$

De (27) et (31) on tire

$$\omega_c = \omega_M \sqrt{2}. \tag{32}$$

La relation (31) n'est valable que si

$$x \leq 2. \tag{29}$$

2.7. Réponse indicielle. Temps de réponse.

2.7.1. Réponse indicielle. — On applique à l'entrée :

$$\theta_e(t) = \theta_0 U(t),$$

de transformée :

$$\theta_e(p) = \frac{\theta_0}{p},$$

$U(t)$, symbole de la fonction échelon-unité.
De (20) et (20′)

$$\theta_s(p) = \frac{\theta_0}{p} \frac{1}{1 + p\Delta t + p^2 \tau_m \Delta t}.$$

La réponse est oscillante si $x < 4$.
Dans ce cas, en posant

$$\alpha = \frac{1}{2\tau_m}, \tag{33}$$

$$\beta = \frac{1}{2\tau_m}\sqrt{\frac{4\tau_m}{\Delta t} - 1}. \tag{34}$$

on trouve

$$y(t) = \frac{\theta_s(t)}{\theta_0} = U(t)\left[1 - e^{-\alpha t} \frac{\sin(\beta t + \varphi)}{\sin \varphi}\right], \tag{35}$$

avec

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha} \tag{36}$$

et pour l'erreur :

$$\varepsilon(t) = \theta_e - \theta_s = \theta_0 e^{-\alpha t} \frac{\sin(\beta t + \varphi)}{\sin \varphi}. \tag{37}$$

2.7.2. Temps de réponse. — Les points à tangente horizontale sont donnés par

$$y'(t) = 0,$$

ce qui donne

$$\beta t = k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

$k = 0$, tangente horizontale à l'origine;
$k = 1$, définit le temps de réponse t_{r1} comme l'abscisse du premier maximum.

D'après

$$t_{r1} = \frac{\pi}{\beta} = \frac{2\pi\tau_m}{\sqrt{\frac{4\tau_m}{\Delta t} - 1}} \tag{39}$$

et le temps réduit

$$t'_{r1} = \frac{t_{r1}}{\tau_m} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}}, \tag{40}$$

relation valable pour $0 < x < 4$.

2.7.3. Maxima. Décrément logarithmique. — *Maxima.* — D'après (36) et (39)

$$k = 0: \quad y_0 = 0;$$

$$k = 1: \quad y_1 = 1 + e^{-\pi\frac{\alpha}{\beta}}; \tag{41}$$

$$k = 2: \quad y_2 = 1 - e^{-2\pi\frac{\alpha}{\beta}};$$

$$k = n: \quad y_n = 1 + (-1)^{n+1} e^{-n\pi\frac{\alpha}{\beta}}; \tag{42}$$

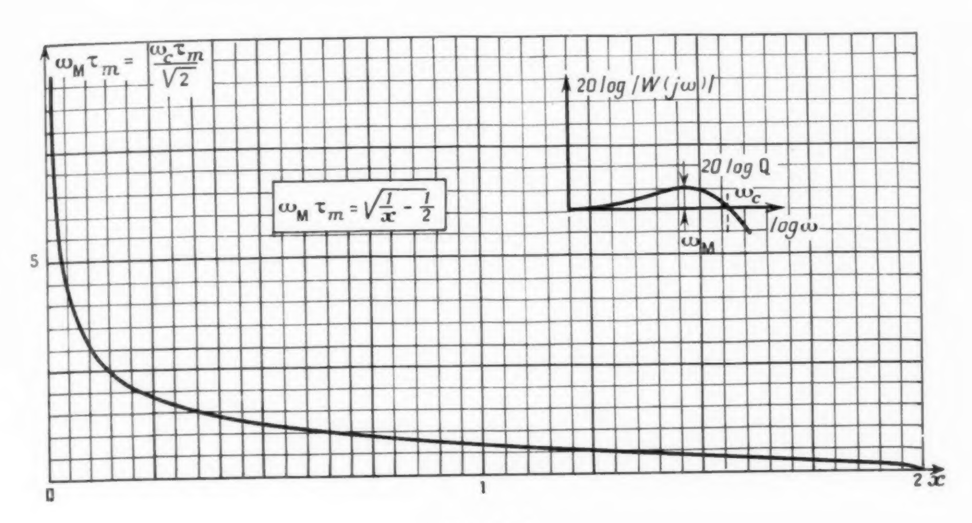


Planche I.

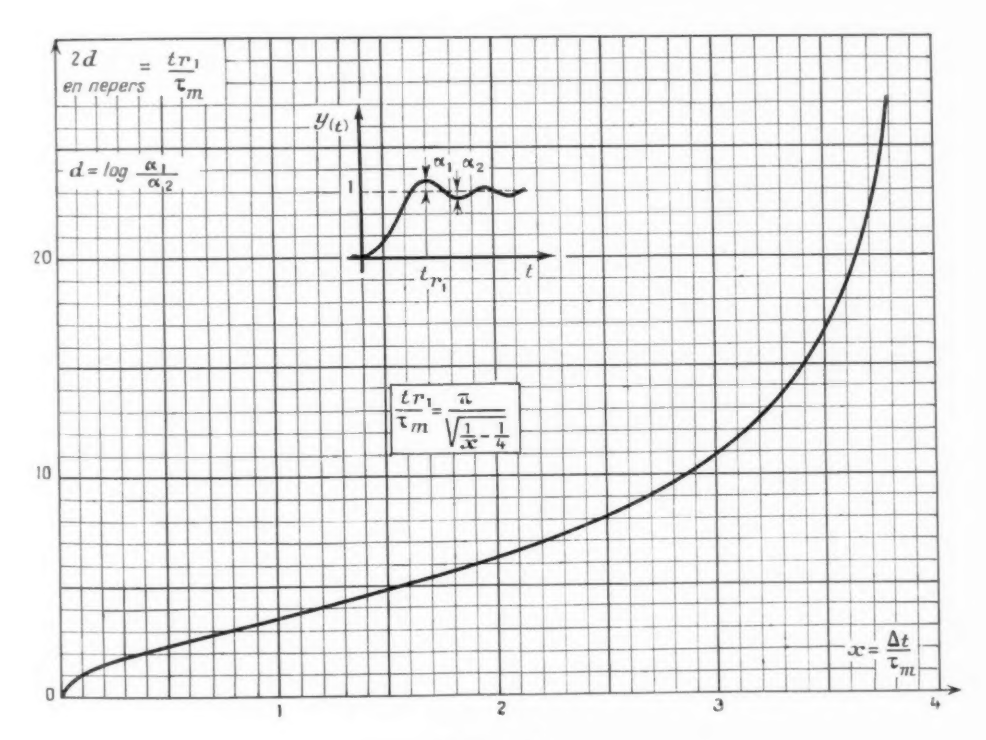


Planche II.

Décrément logarithmique. — D'après (23)

$$d = \operatorname{Log} e^{\pi\frac{\alpha}{\beta}} = \pi\frac{\alpha}{\beta},$$

d'où d'après (33) et (34)

$$(43)\qquad d = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{4\tau_m}{\Delta t} - 1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}}.$$

2.8. Relations pratiques.

2.8.1. Relation entre le rebondissement Q et le décrément logarithmique d. — En éliminant x entre les relations (30) et (43) on trouve

$$(44)\qquad Q = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{\pi} + \frac{\pi}{d}\right].$$

Dans cette relation, d est exprimé en népers.

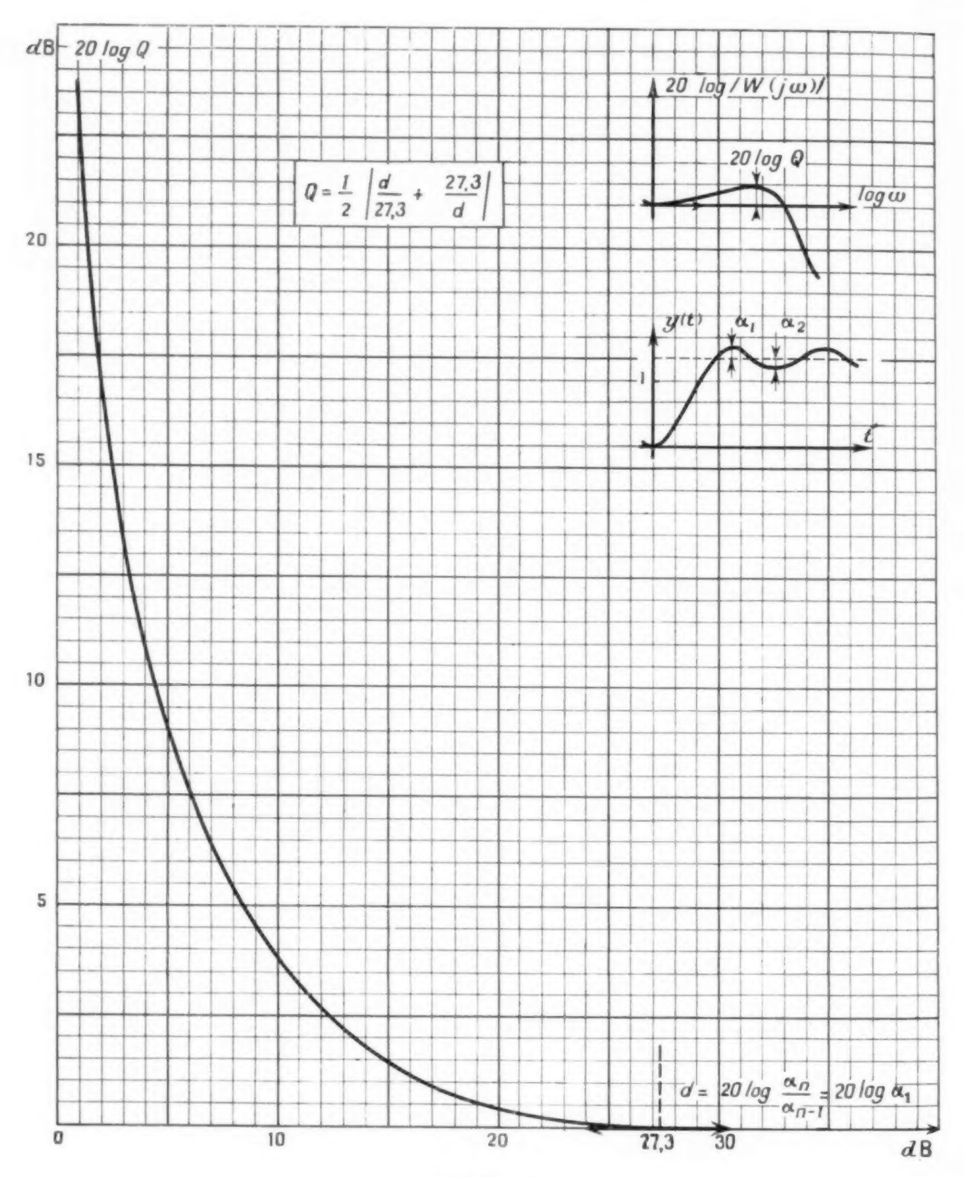


Planche III.

La même relation avec d en décibels devient

$$Q = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{27,3} + \frac{27.3}{d}\right]. \tag{44'}$$

on tire directement

$$x = 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}\right). \tag{45}$$

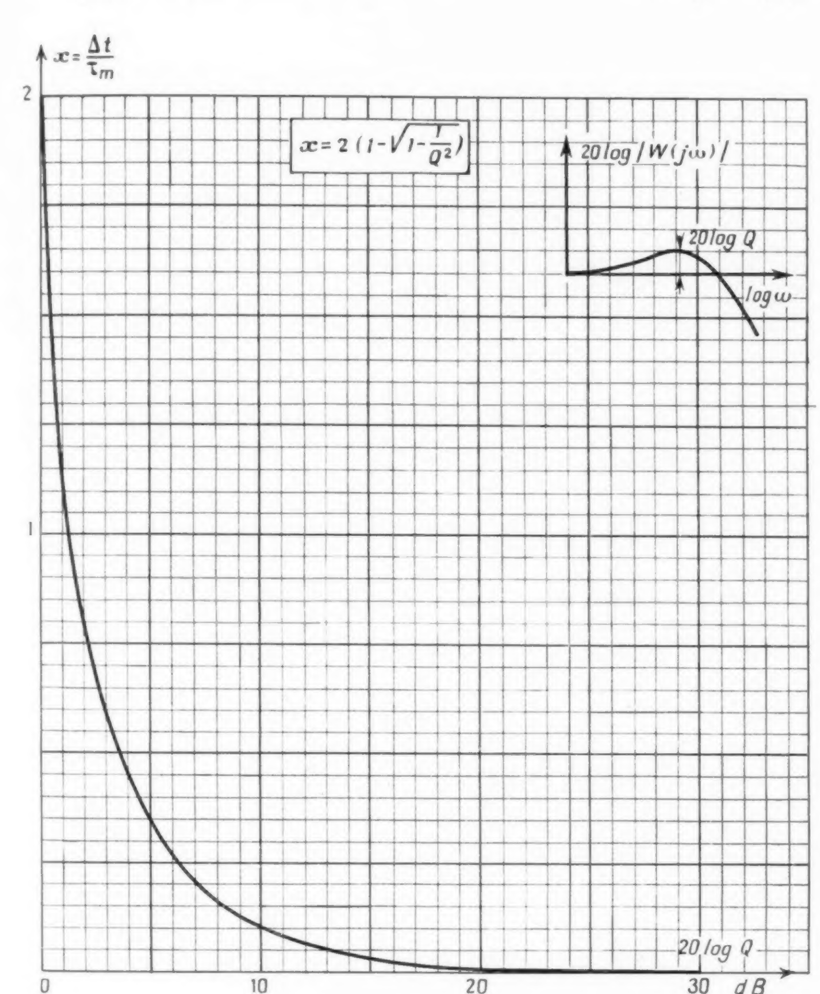


Planche IV.

Validité des relations. — (44) est valable dans l'intervalle

$$0 \leq d \leq \pi.$$

(44′) est valable dans l'intervalle

$$0 \leq d \leq 27,3.$$

2.8.2. Relation entre le rebondissement Q et le retard dynamique Δt. — De la relation (30)

Les relations (27), (32), (40), (44′) et (45) sont traduites par des courbes. *Voir* respectivement les planches I, II, III et IV.

2.9. **Notion de retard dynamique**.

2.9.1. Réponse a un échelon-vitesse. — L'asservissement en position est soumis à l'échelon-vitesse

$$\theta_e(t) = U(t)\,\Omega t.$$

de transformée

$$\theta_e(p) = \frac{\Omega}{p^2}.$$

L'angle de sortie est donné par

$$\theta_s(p) = \frac{\Omega}{p^2}\,\frac{1}{1 + p\,\Delta t + p^2\tau_m\,\Delta t}.$$

Avec la condition $x < 4$ et les notations du paragraphe 2.7.1, on a

$$(46)\qquad \theta_s(t) = U(t)\,\Omega\left[t - \Delta t + e^{-\alpha t}\,\frac{\sin(\beta t + 2\varphi)}{\beta}\right].$$

La forme de la réponse est indiquée sur la figure 7.

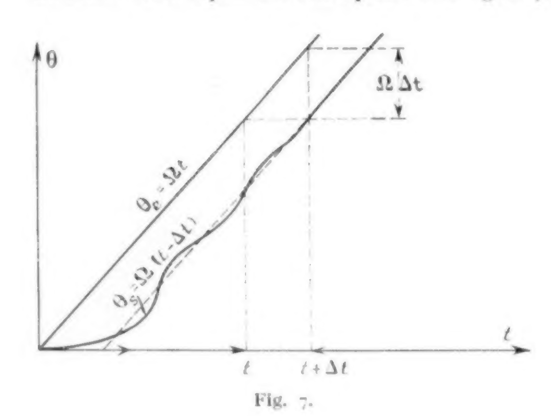


Fig. 7.

Après l'évanouissement du transitoire (troisième terme de la parenthèse) la relation (46) devient

$$(47)\qquad [\theta_s(t)]_{t\nearrow\infty} = U(t)\,\Omega\,(t - \Delta t),$$

$$(47')\qquad [\theta_s(t)]_{t\nearrow\infty} = \theta_e(t) - \Omega\,\Delta t.$$

L'erreur de l'asservissement en position est

$$(48)\qquad \varepsilon_d = \Omega\,\Delta t \quad (^3).$$

La relation (47) montre que l'équation du mouvement de l'arbre de sortie en régime permanent se déduit de celle du mouvement de l'arbre d'entrée par une translation ($-\Delta t$) sur l'échelle des temps. On désigne couramment Δt sous le nom de « retard dynamique »).

2.9.2. Réponse a un mouvement uniformément accéléré. — L'asservissement en position est soumis à l'échelon

$$(49)\qquad \theta_e(t) = U(t)\left[\Omega t + \frac{1}{2}\gamma t^2\right],$$

de transformée

$$\theta_e(p) = \frac{\Omega}{p^2} + \frac{\gamma}{p^3}.$$

On s'intéresse simplement à l'erreur

$$(50)\qquad \varepsilon(p) = \theta_e - \theta_s = \frac{\theta_e}{1 + T}.$$

Il suffit de connaître sa valeur à l'instant t mais seulement lorsque le régime permanent est atteint ($t > t_{r1}$). Dans ce cas en remplaçant $\frac{1}{1+T}$ par un développement limité suivant les puissances croissantes de p, on a

$$(51)\qquad \left(\frac{1}{1+T}\right)_{p\searrow 0} = p\,\Delta t + p^2\,\Delta t\,(\tau_m - \Delta t),$$

θ'_e et θ''_e désignant les premières dérivées de θ_e, (50) et (51) donnent

$$\varepsilon(t) = \Delta t\,\theta'_e + \Delta t\,(\tau_m - \Delta t)\,\theta''_e.$$

D'après (49)

$$(52)\qquad \begin{cases} \varepsilon(t) = (\Omega + \gamma t)\,\Delta t + \gamma\,\Delta t\,(\tau_m - \Delta t), \\ \varepsilon(t) = \Omega\,\Delta t + \gamma\,\Delta t\,(t + \tau_m - \Delta t). \end{cases}$$

Dans cette relation on retrouve l'erreur $\Omega\Delta t$ due à l'échelon-vitesse à laquelle s'ajoute l'erreur due à l'échelon-accélération.

Dans cette dernière on distingue une erreur constante $\gamma\Delta t\,(\tau_m - \Delta t)$ qu'on peut annuler en faisant $\Delta t = \tau_m$ (servomécanisme très amorti) et une erreur croissant linéairement avec le temps $\gamma\Delta t\,t$. Cette erreur tend vers l'infini et pratiquement on constate que le servomécanisme décroche (il y a toujours une limitation physique, ici la vitesse maximum du moteur).

Dans l'exemple de fonction d'entrée donné, γ existe dans l'intervalle $0 < t < \infty$.

Pratiquement, il est plus fréquent de trouver des fonctions d'entrée dont les termes accélération tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Souvent on se contentera pour calculer les erreurs de simplifier la fonction représentant le mouvement d'entrée en introduisant des impulsions d'accélération de durée T apparaissant à une certaine époque t_1 du mouvement et disparaissant à l'époque t_2.

Ainsi on pourra avoir une idée de l'erreur maximum

$$(53)\qquad \varepsilon_M \simeq \Omega\,\Delta t + \gamma\,\Delta t\,(T + \tau_m - \Delta t),$$

la différence ($\tau_m - \Delta t$) est le plus souvent négli-

(3) ε_d est obtenu directement en appliquant le théorème des valeurs finales

$$\varepsilon_d(t)_{t\nearrow\infty} = \lim_{p\searrow 0}\left[p\,\theta_e(p)\,\frac{1}{1+T}\right].$$

geable devant T, pour les moteurs diphasés de faible puissance à réponse rapide mais il sera nécessaire de ne point négliger τ_m dans les servomoteurs de grande puissance.

2.10. Importance du retard dynamique dans la détermination des erreurs dues aux perturbations extérieures.

2.10.1. NATURE DES PERTURBATIONS. — Par perturbations extérieures, on désigne d'une part les imperfections des différents éléments constituant la boucle de l'asservissement, d'autre part les perturbations d'origine extérieure s'introduisant en un point de la boucle. De par la nature des éléments constituant la boucle, on peut distinguer :

a. des perturbations d'origine électrique :

— tension parasite de même fréquence que la porteuse. Composante en phase E;

b. des perturbations d'origine électromécanique et mécanique.

Les premières sont relatives principalement au moteur (*voir* 1.4). Les secondes sont relatives à la liaison mécanique entre le moteur et l'organe asservi où apparaissent des couples parasites de frottement sec. On pourra y joindre le couple résistant appliqué sur l'arbre de sortie.

2.10.2. CALCUL DES ERREURS DUES AUX PERTURBATIONS EXTÉRIEURES. NOTION DE VITESSE DE FROTTEMENT STATIQUE. — Il est toujours possible de

Fig. 8.

ramener l'ensemble des perturbations extérieures de natures différentes à une perturbation unique.

A cet effet, considérons une boucle de servomécanisme quelconque (*fig.* 8) le long de laquelle l'énergie se propage dans un sens déterminé sous des formes diverses : électrique, mécanique, lumineuse, etc. Les grandeurs perturbantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'introduisent en différents points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ au même titre que la grandeur d'entrée au point M_0.

Le système étant linéaire du moins pour les petits mouvements, on peut appliquer le théorème de la superposition des états d'équilibre et calculer par exemple l'erreur due à x_n :

T désignant la fonction de transfert de la boucle;

T_{n0} désignant la fonction de transfert entre M_n et M_0;

x_{nr} le signal de contreréaction dû à x_n;

$\varepsilon_{0n} = T_{n0}\varepsilon_n$ l'erreur qui en résulte en M_0.

$\varepsilon_n = x_n - x_{nr}$ l'écart qui en résulte en M_n;

On a

$$\varepsilon_{0n} = T_{n0}\frac{x_n}{1+T}. \tag{54}$$

L'erreur totale commise sur θ_s et due à toutes les grandeurs perturbantes sera

$$\varepsilon_{0t} = \frac{1}{1+T}\sum x_n T_{n0}. \tag{55}$$

Toutes ces causes (x_n) d'erreurs sont en général fonctions du temps mais il est souvent possible de définir pour chacune d'elles une borne supérieure X_n.

Une limite supérieure de l'erreur totale ε_{sM} en régime permanent ($t \to \infty$) sera obtenue en supposant qu'on applique aux différents points de la boucle des échelons : $\frac{X_n}{p}$.

Dans ce cas ε_{sM} sera définie à partir de (55) en écrivant

$$\varepsilon_{sM} = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p}{1+T}\sum\frac{X_n}{p}T_{n0}\right).$$

D'où d'après (19),

$$\varepsilon_{sM} = \Delta t\sum X_n \lim_{p\to 0}(pT_{0n}). \tag{56}$$

Soit en posant

$$\Omega_{sp} = \sum X_n \lim_{p\to 0}(pT_{0n}). \tag{57}$$

$$\varepsilon_{sM} = \Omega_{sp}\,\Delta t; \tag{56'}$$

ε_{sM} est l'erreur sur l'*arbre de sortie*;

Ω_{sp} homogène à une vitesse est aussi mesurée sur l'arbre de sortie;

Δt retard dynamique du servomécanisme est un invariant.

Pratiquement on préfère pour des raisons justifiées plus loin mesurer cette erreur sur l'arbre du moteur.

Dans ce cas en désignant par :

Ω_{mp}, l'erreur de vitesse sur l'arbre du moteur;
ε_{mM}, l'erreur de position sur l'arbre moteur;

on a

$$\Omega_{mp} = \sum X_n \lim_{p \to 0} (pn\, T_{on}), \tag{58}$$

$$\varepsilon_{mM} = \Omega_{mp}\, \Delta t. \tag{59}$$

connaissant ε_{mM} on a toujours rapidement $\varepsilon_M = \frac{\varepsilon_{mM}}{n}$.

On peut appliquer ces résultats au problème traité.

a. Perturbations électriques. — On suppose par exemple la tension parasite $E = X_n$ appliquée à l'entrée de l'amplificateur (point M, *fig.* 4).

Dans ce cas

$$T_{on} = \frac{k\, A}{n} \frac{1}{p(1 + p\tau_m)}, \tag{60}$$

(58) donne alors

$$\Omega_{mE} = k \,.\, AE. \tag{61}$$

b. Perturbations mécaniques, vitesse de frottement statique. — Soit Γ_r le couple résistant appliqué à l'arbre de sortie.

Pour déterminer la fonction de transfert

$$T_{on} = \frac{\theta_s}{\Gamma_r},$$

il suffit d'écrire l'équation du mouvement de l'arbre moteur soumis au couple Γ_r en remarquant qu'ici $v_m = 0$,

$$\frac{\Gamma_r}{n} - k_2 n \Omega_s = J n \frac{d\Omega_s}{dt},$$

d'où l'on tire

$$T_{on} = \frac{\theta_s}{\Gamma_r} = \frac{1}{n^2 k_2} \frac{1}{p(1 + p\tau_m)}, \tag{62}$$

d'où, d'après (58),

$$\Omega_{mr} = \frac{\Gamma_r}{n k_2} = \Omega_M \cdot \frac{\frac{\Gamma_r}{n} \cdot \frac{n}{1}}{\Gamma_M}. \tag{63}$$

On remarquera que (Ω_{mr}) est la vitesse à laquelle tournerait le moteur si on le soumettait à un couple moteur égal à $\frac{\Gamma_r}{n}$. Pour cette raison on appelle quelquefois cette vitesse : vitesse de frottement statique du moteur.

2.10.3. Mesures des perturbations. Mesure du retard dynamique. — 2.10.3.1. Du résultat de la mesure d'une perturbation x on est toujours conduit à déduire l'erreur vitesse Ω_{mx} qu'elle introduit sur la vitesse du moteur.

Dans le cas des perturbations motrices, tensions électriques ou couples moteur (couple de dérive par exemple) il suffit de couper la boucle. La vitesse à laquelle tourne le moteur représente alors l'erreur correspondante.

Dans le cas de perturbations s'opposant au mouvement du moteur il est évidemment nécessaire de mesurer la perturbation d'où l'on déduira l'erreur vitesse d'après les relations (61), (63) et autres relations qu'on peut déterminer par la même méthode pour des perturbations d'une autre nature.

Pour mesurer le frottement de la mécanique on peut utiliser une méthode électrique qui consiste à mesurer la tension v_m qu'il faut appliquer au moteur pour démarrer l'ensemble. La courbe de vitesse à vide Ω_m (v_m) où la connaissance de k, permet de déterminer l'erreur vitesse Ω_{mx} correspondante.

2.10.3.2. *Mesure du retard dynamique.* — La mesure du retard dynamique est basée sur l'utilisation de la relation

$$\varepsilon_d = \Omega\, \Delta t \tag{48}$$

[*Cf.* réponse à un échelon-vitesse (2.9)].

Ω représente la vitesse de l'arbre d'entrée ou de sortie;
ε_d représente l'erreur mesurée sur l'arbre de sortie;
Δt représente le retard dynamique;
ε_{dm} et Ω_m désignant l'erreur et la vitesse mesurées sur l'arbre moteur, on a de même

$$\varepsilon_{dm} = \Omega_m\, \Delta t. \tag{64}$$

Dans l'étude expérimentale de la réponse à un échelon vitesse on pourrait mesurer ε_d et Ω et en déduire d'après (48) le retard dynamique Δt.

Il est plus commode d'opérer par une mesure statique de la façon suivante :

Le servomécanisme étant asservi sur une grandeur d'entrée constante, on décale mécaniquement l'arbre de sortie; il en résulte l'apparition d'une erreur $\Delta\theta_m$ mesurée sur l'arbre moteur et d'une tension v_m appliquée sur son enroulement de commande.

Cet état représente le régime permanent du même servomécanisme dans la réponse à un échelon-vitesse de valeur Ω_m (Ω_m mesurée sur le moteur) avec la seule condition $\Omega_m = kv_m$.

Il résulte que de la connaissance de $\Delta\theta_m$, v_m et k on peut déduire directement

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta_m}{\Omega_m} = \frac{\Delta\theta_m}{k v_m}. \tag{65}$$

Si k n'est pas connu on peut le déduire direc-

tement d'une autre mesure consistant à couper la boucle à l'entrée de l'amplificateur et à appliquer à l'entrée une tension telle que le moteur soit commandé par la tension v_m. On mesure Ω_m au stroboscope ou au chronomètre sur un arbre tournant plus lentement.

La mesure du retard effectuée de cette façon peut cependant être affectée d'une erreur importante provenant du phénomène suivant : l'impédance d'entrée du moteur croît avec la tension appliquée et la vitesse.

Il en résulte que la mesure de k ne peut pas toujours être effectuée de la façon indiquée, les erreurs constatées pouvant être de l'ordre de 30 %.

La mesure de k se fait alors couramment ainsi : la mesure statique de l'erreur $\Delta\theta_m$ auquel correspond la tension v_m du moteur rotor bloqué, étant faite, on coupe la boucle d'asservissement à l'entrée de l'amplificateur. On bloque le rotor du moteur et l'on applique à l'amplificateur une tension telle que le moteur soit commandé par la tension v_m notée précédemment. On débloque alors le moteur qui se met à tourner et l'on constate un accroissement de la tension de commande. Il suffit de mesurer la vitesse Ω_m. Le retard est donné directement par

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta_m}{\Omega_m}.$$

Cette méthode a été mise au point et vérifiée expérimentalement par une mesure absolue, au laboratoire. Si l'on peut considérer l'amplificateur de puissance comme une source de courant on peut aussi mesurer le retard exactement en substituant à la mesure de v_m celle du courant de commande I. Cette mesure n'est pas toujours commode sur un amplificateur symétrique classe B.

2.11. Grandeurs caractéristiques du moteur d'asservissement.

De l'étude de l'asservissement en position, on peut dégager un certain nombre de grandeurs définissant les qualités d'un moteur d'asservissement sur les deux points principaux suivants.

2.11.1. Vélocité du moteur. Constante de temps. Temps de réponse. — Le moment d'inertie du rotor J et le coefficient de frottement dynamique k_2 sont les données principales.

On en déduit en effet la constante de temps électromécanique

(66) $$\tau_m = \frac{J}{k_2},$$

avec laquelle à partir de la relation (40) on calcule le temps de réponse t_{r1} lorsque x a été choisi.

On admet couramment que le servomécanisme est satisfaisant pour des valeurs de Q de l'ordre de 1,3, soit $20 \log Q = 2{,}3$ dB.

Les courbes $Q(d)$ et $x(Q)$ (*voir* planches III et IV) donnent les valeurs correspondantes :

$$d = 12{,}8 \text{ dB},$$
$$x = 0{,}72;$$

d'où

(67) $$\Delta t = 0{,}72\,\tau_m.$$

La courbe $\frac{t_{r1}}{\tau_m}(x)$ donne

(68) $$t_{r1} = 2{,}9\,\tau_m.$$

La connaissance de Δt détermine d'après (18) le gain électronique A (les autres paramètres k, λ et n étant supposés connus).

2.11.2. Facteur de qualité. — 2.11.2.1. Nous avons indiqué la nature des principaux éléments parasites affectant le fonctionnement du moteur et l'intérêt d'exprimer leurs effets par une vitesse parasite Ω_{mp}. On notera l'importance de k_2 pour le calcul de la vitesse parasite résultant des couples parasites : frottement, couple de dérive.

2.11.2.2. *Facteur de qualité F.* — Considérons un asservissement en position dont l'arbre de sortie doit pouvoir tourner à la vitesse maximum Ω_{sM} utilisant un moteur de vitesse maximum Ω_M et de vitesse parasite Ω_{mp}. Ω_{sM} et Ω_M imposent alors la démultiplication entre les deux arbres

(69) $$n = \frac{\Omega_M}{\Omega_{sM}}.$$

Le retard dynamique Δt étant choisi, la vitesse parasite entraîne une erreur sur le positionnement de l'arbre de sortie égale à

(70) $$\varepsilon_{sp} = \frac{1}{n}\,\Omega_{mp}\,\Delta t$$

ou encore

(70) $$\varepsilon_{sp} = \frac{\Omega_{sM}}{\Omega_M \dfrac{1}{\Omega_{mp}\,\Delta t}}.$$

Écrit sous cette forme, on peut noter que si l'on convient de prendre comme unité de mesure d'angle l'erreur $\Omega_{mp}\Delta t$, l'inverse $\frac{1}{\Omega_{mp}\Delta t}$ mesure un tour d'arbre moteur.

TABLEAU II.

Type de moteur	Données du moteur.					Retard dynamique	Abscisse du maximum	Bande passante à 0 dB	Temps de réponse	Unité d'erreur statique	Facteur de qualité	Erreur statique pour $\Omega_M = 1$ rad/s.
	J (g × cm²)	k_s (dyne × cm / rad/s).	τ_m (s).	Ω_M (t/s).	Ω_{mp} (t/s).	Δt(s).	ω_M (rad/s).	ω_c (rad/s).	t_r (s)	ε_{mp} (tour-moteur).	F (unité/s).	ε_{sp} (tour).
Moteur C. S. F. (50 c/s)	10	2 600	$\frac{1}{263}$	20	0,2	Performance utilisable, $Q = 1,3$, (Résultat théorique).						
						$\frac{1}{365}$	236	334	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{1\,800}$	36 000	$\frac{1}{227\,000}$
						Performance utilisable, $Q = 1,3$, (Résultat expérimental).						
						$\frac{1}{110}$	85	145		$\frac{1}{550}$	11 000	$\frac{1}{69\,000}$
						Performance limite, $Q = 8$, (Résultat expérimental).						
						$\frac{1}{350}$	210			$\frac{1}{1\,750}$	35 000	$\frac{1}{220\,000}$
Moteur S. A. G. E. M. (400 c/s)	5	170	$\frac{1}{33}$	90	5	Performance utilisable, $Q = 1,3$ (Résultat théorique).						
						$\frac{1}{40}$	30	42	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{8}$	720	$\frac{1}{4\,500}$
						Performance utilisable, $Q = 1,3$ (Résultat expérimental).						
						$\frac{1}{35}$	27	37		$\frac{1}{7}$	630	$\frac{1}{4\,000}$
						Performance limite, $Q = 4$ (Résultat expérimental).						
						$\frac{1}{400}$	82	120		$\frac{1}{80}$	7 200	$\frac{1}{45\,000}$

Avec cette convention

$$F = \Omega_M \frac{1}{\Omega_{mp}\,\Delta t} \tag{7}$$

exprime la vitesse maximum du moteur en unités d'erreur par seconde.

Ce facteur est un invariant, on peut en effet écrire

$$F = \frac{\Omega_M}{n} \frac{1}{\frac{\Omega_{mp}}{n}\Delta t} = \Omega_{sM} \frac{1}{\Omega_{sp}\,\Delta t}.$$

où

Ω_{sM} est la vitesse maximum de l'arbrede sortie;

Ω_{sp} est la vitesse parasite du moteur, mesurée sur l'arbre de sortie.

Suivant qu'on exprime l'erreur sur l'arbre moteur ou sur l'arbre de sortie, on a

$$F = \frac{\Omega_{sM}}{\varepsilon_{sp}} = \frac{\Omega_M}{\varepsilon_{mp}},$$

Ω_{sM} étant une donnée du problème, l'erreur ε_{sp} est d'autant plus faible que F est élevé. Ce facteur caractérise la contribution du moteur à l'erreur du servomécanisme et permet de comparer directement la précision des différents moteurs.

3. APPLICATION.

3.1. Nous pouvons appliquer les résultats précédents à deux moteurs diphasés fonctionnant l'un avec une porteuse de 50 c/s, l'autre avec une porteuse de 400 c/s. Nous avons déjà signalé que si les résultats théoriques étaient confirmés par l'expérience avec une bonne approximation pour les moteurs à porteuse élevée, il n'en était pas de même pour les moteurs à faible constante de temps utilisant une porteuse à 50 c/s.

Cette divergence entre les résultats théoriques et expérimentaux apparaît entre la surtension Q calculée et mesurée de la courbe amplitude fréquence correspondant à une valeur donnée de $x = \frac{\Delta t}{\tau_m}$.

La surtension réelle est toujours plus élevée que la surtension calculée, ce qui conduit pratiquement à utiliser une valeur de Δt plus élevée que la valeur calculée. Pour cette raison on donnera dans l'application deux séries de grandeurs caractéristiques correspondant l'une à la surtension utilisable $Q = 1{,}3$, l'autre à la surtension maximum Q_M du servomécanisme à la limite de la stabilité obtenue expérimentalement. Le choix de la surtension n'est pas impératif et il est possible parfois pour bénéficier d'un retard dynamique acceptable de consentir à une surtension plus élevée que celle proposée.

3.2. **Moteur diphasé 50 c/s.**

Le moteur étudié est le moteur C. S. F. dont on a déjà donné les caractéristiques générales en 1.4.4.

On donnera simplement ici les grandeurs caractéristiques données en 2.1.1, en rappelant la vitesse parasite nécessaire au calcul de F. Ces résultats sont comparés aux résultats expérimentaux.

Les grandeurs caractéristiques du moteur C. S. F. sont données dans le tableau II, comparées à celles du moteur 400 c/s.

Le moteur étudié est un moteur S.A.G.E.M. dont les données sont indiquées dans le tableau I.

Tableau I.

Fréquence	$F = 400$ c/s
Nombre de pôles	$2p = 6$
Dimensions du corps { longueur.	$L = 63$ mm
Dimensions du corps { diamètre.	$D = 45$ mm
Tension d'alimentation locale	$V_l = 127$ V
Puissance locale	$P_l = 35$ VA
Tension de commande	$0 < V_m < 100$ V
Impédance signal rotor libre	$\lvert z \rvert = 500\ \Omega$
Puissance maximum de commande	$P_M = 20$ VA
Couple maximum	$\Gamma_M = 1{,}57 \cdot 10^5$ dyne × cm ou 160 gp × cm
Vitesse maximum	$\Omega_M = 690$ rad/s ou 110 t/s
Moment d'inertie du rotor	$J = 5$ g × cm²
Gradient de couple-tension	$k_1 = 1{,}47 \cdot 10^3$ dyne × cm/V ou 1,5 gp × cm/V
Frottement dynamique	$k_2 = 170$ dyne × cm/rad/s ou 1,1 gp × cm/t/s
Gradient de vitesse-tension	$k = 8{,}65$ rad/s/V ou 1,38 t/s/V
Constante de temps électromécanique	$\tau_m = 30$ ms
Vitesse parasite	$\Omega_{mp} = 31$ rad/s ou 5 t/s

De l'allure hyperbolique de la courbe vitesse-tension (*fig.* 3) il résulte que la puissance de commande croît très rapidement avec la vitesse, d'où l'intérêt dans les applications de prendre comme vitesse maximum non pas la valeur indiquée dans le tableau ci-dessus, mais une valeur inférieure à laquelle correspond une puissance de commande notablement inférieure. Ainsi pour l'exemple cité :

$$\text{pour } \Omega_M = 90 \text{ t/s}, \qquad P_M = 6{,}8 \text{ VA}.$$

(*A suivre.*)

SUR LA THÉORIE DU SPECTROMÈTRE DE MASSE A DÉVIATION DE 90° (1)

PAR D. CHARLES,

Département « Recherches Électronique et atomistique »
du Centre de Recherches Techniques de la Compagnie Générale de T. S. F.

DEUXIÈME PARTIE : CHAMP MAGNÉTIQUE RÉEL, TRAJECTOIRES DANS LE PLAN DE SYMÉTRIE (2)

SOMMAIRE. — *Dans cette deuxième partie, l'auteur étudie, dans le cas particulier des spectromètres de masse à déviation de 90° et pour des trajectoires situées dans un plan de symétrie du champ magnétique, les effets du débordement de ce champ au-delà des pièces polaires et sa correction et l'influence sur la formation des images de la non-uniformité du champ magnétique analyseur.*

L'application des résultats des calculs généraux est faite à des cas pratiques mettant ainsi en évidence les ordres de grandeur à respecter lors d'une réalisation industrielle.

(C. D. U. : 537.534.72.)

SUMMARY. — *In this second part the author considers, in the special case of mass spectrometers with 90° deviation and for trajectories situated in a plane of symmetry of the magnetic field, the effects of overlap of this field beyond the pole pieces, as well as its correction and the influence of the non-uniformity of the analyser magnetic field on picture formation.*

The results of the general calculations are applied to some practical cases, thus bringing out the orders of magnitude to be respected in industrial designs.

(U. D. C. : 537.534.72.)

INTRODUCTION.

Dans une première partie [1] on a supposé les trajectoires des ions contenues dans un plan de symétrie et le champ magnétique analyseur idéal, c'est-à-dire, uniforme et passant brusquement d'une valeur constante à 0 à la traversée de certaines limites.

On a supposé aussi la fente objet comme éclairée par l'ensemble source et canon à ions, cette fente se comportant donc comme une source secondaire. On sait que ce point de vue traditionnel n'est pas partagé par tous les auteurs [2]. Dans le cadre des hypothèses précédentes, on a étudié la formation des images et évalué ses principaux défauts.

Dans cette deuxième partie, on suppose encore les trajectoires contenues dans un plan de symétrie du champ magnétique, mais on ne considère plus le champ comme idéal et l'on étudie l'influence sur l'imagerie de son débordement et de sa non rigoureuse uniformité.

1. INFLUENCE DU DÉBORDEMENT DU CHAMP MAGNÉTIQUE.

1.1. Expression analytique du débordement.

La figure 1 représente les pièces polaires de l'électroaimant ou de l'aimant. La trajectoire moyenne est de rayon R. Le plan de symétrie du

---

(1) Manuscrit reçu le 22 novembre 1956.

(2) La première partie de cet article a paru dans le numéro de juillet 1956 des *Annales de Radioélectricité*.

champ magnétique est le plan xOz orthogonal au vecteur induction dans l'entrefer, situé à égale distance des faces polaires; c'est, dans le cadre des hypothèses, le plan des trajectoires. Les vecteurs induction sont tous situés dans le plan xOy ou dans

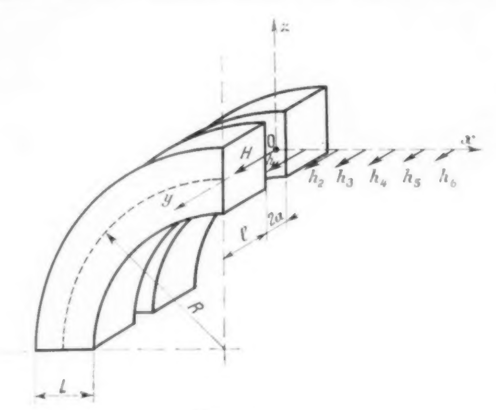


Fig. 1.

des plans qui lui sont parallèles. En supposant les faces polaires indéfinies dans la direction Oz, il suffit de déterminer la distribution des amplitudes des vecteurs h_1, h_2, h_3, ... en fonction de l'abscisse x.

A titre d'exemple, dans un spectromètre de masse à déviation de 90°, on a $R = 200$ mm, $L = 68$ mm, $\ell = 70$ mm et l'entrefer $2a = 12$ mm. On peut admettre que l'épaisseur des pièces polaires n'intervient pas dans la forme du débordement du champ magnétique, ce qu'a montré N. D. Coggeshall [3].

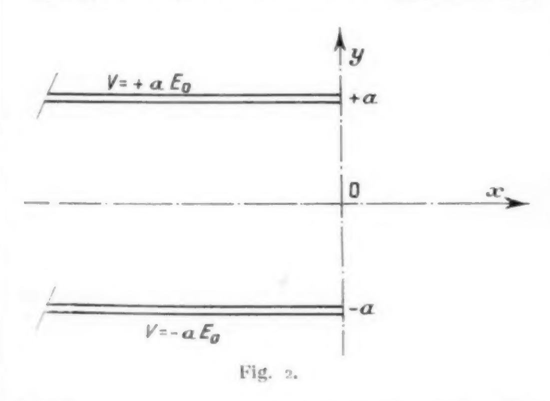


Fig. 2.

On supposera aussi que la largeur L n'intervient pas si elle est suffisamment grande devant l'entrefer $2a$; on la supposera infinie. Dans ces conditions on peut considérer les pièces polaires comme équipotentielles et confondre le champ magnétique avec le champ électrique d'un condensateur plan.

Avec les notations de la figure 2, les équipotentielles et les lignes de force sont définies par [4]

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\pi}\left[1 + e^{\frac{\pi}{aE_0}\psi}\cos\left(\dfrac{\pi}{aE_0}\varphi\right) - \dfrac{\pi}{aE_0}\psi\right], \\[2ex] y = \dfrac{a}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{aE_0}\varphi + e^{-\frac{\pi}{aE_0}\psi}\sin\left(\dfrac{\pi}{aE_0}\varphi\right)\right]. \end{cases}$$

Les équipotentielles étant obtenues pour $\varphi = \text{const.}$ et en particulier dans le plan de symétrie $\varphi = 0$.

Quant au champ complexe il est

$$(2)\qquad E = E_x + jE_y = \frac{-jE_0}{1 + e^{-\frac{\pi}{aE_0}\psi}\,e^{-\frac{\pi}{aE_0}\varphi}}.$$

Dans le plan de symétrie $E_x = 0$, d'où

$$(3)\qquad E_y = \frac{-E_0}{1 + e^{-\frac{\pi}{aE_0}\psi}}.$$

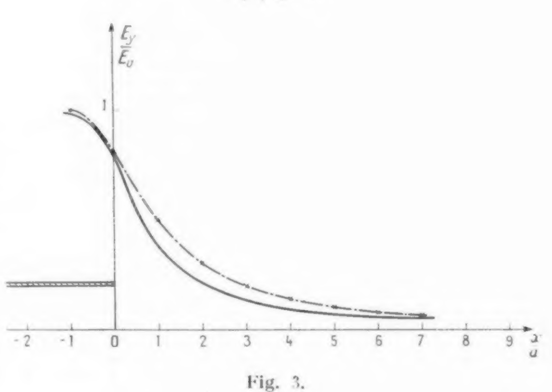


Fig. 3.

Si l'on élimine ψ entre (3) et la première relation (1) où l'on fait $\varphi = 0$, on obtient

$$(4)\qquad x = \frac{a}{\pi}\left[\frac{E_0}{E_y} + \operatorname{Log}\frac{E_0 - E_y}{E_y}\right].$$

C'est la relation qui donne le débordement du champ dans le plan de symétrie. Si l'on calcule $\dfrac{E_y}{E_0}$ en fonction de $\dfrac{x}{a}$, on obtient le tableau I.

TABLEAU I.

$\frac{E_y}{E_0}$.	$\frac{x}{a}$.	$\frac{E_y}{E_0}$.	$\frac{x}{a}$.
0,999.......	−18,55	0,40.......	0,93
0,99.......	− 1,14	0,30.......	1,33
0,90.......	− 0,35	0,20.......	2,03
0,80.......	− 0,043	0,10.......	3,88
0,70.......	+ 0,186	0,05.......	7,26
0,60.......	+ 0,40	0,01.......	33,9
0,50.......	0,635		

Dont on déduit la courbe de la figure 3.

On peut remarquer que le champ n'a diminué que du 1/100e de sa valeur quand on est dans l'entrefer à une distance du bord de l'ordre de la moitié de la grandeur de cet entrefer.

Exemple numérique. — Avec $R = 200$ mm, dans le cas symétrique (*voir* Ire partie) et un entrefer de 12 mm, on a dans le voisinage des fentes objet et image :

$$\frac{x}{a} = \frac{200}{6} = 33,3$$

et d'après la figure 3, le champ est le 1/100e de sa valeur maximum. Ainsi pour un champ de 7 200 Oe on a encore 72 Oe dans le voisinage des fentes.

Par ailleurs la courbe montre que dans l'entrefer le champ est diminué du 1/1000e de sa valeur maximum à 11 cm environ du bord des pièces polaires, ce qui veut dire que le champ n'est pas constant au 1/1000e quand on se déplace dans l'entrefer le long d'une trajectoire moyenne (ce que confirment les mesures).

Expression analytique simple. — La relation (4) est peu maniable; on peut la remplacer par

$$(5)\qquad \frac{E_x}{E_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x + a}{2a}\right)^2}$$

représentée par la courbe en trait mixte de la figure 3. L'approximation est très convenable puisque la première courbe n'est elle-même obtenue qu'avec certaines hypothèses.

1.2. Intégration des équations du mouvement d'un ion.

1.2.1. Méthode de calcul. — Avec les axes et les notations de la figure 4, l'expression du débordement du champ magnétique est

$$(6)\qquad H_y = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{y - a}{2a}\right)^2}.$$

Un ion de masse m part de A avec une vitesse initiale v_0 qui, exprimée en électrons-volts est V_0,

$$(7)\qquad v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} V_0}.$$

Les composantes sur les axes de la vitesse initiale sont

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{x}_0 = \sqrt{\dfrac{2e}{m} V_0} \sin\alpha, \\ \dot{y}_0 = \sqrt{\dfrac{2e}{m} V_0} \cos\alpha. \end{cases}$$

Les équations du mouvement d'un ion ayant cette vitesse initiale, dans le champ magnétique variable $H(y)$ sont

$$(9)\qquad \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{e}{m} \dot{y} H(y), \\ \ddot{y} = -\dfrac{e}{m} \dot{x} H(y), \end{cases}$$

avec une intégrale première

$$(10)\qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{2e}{m} V_0 = \text{const.}$$

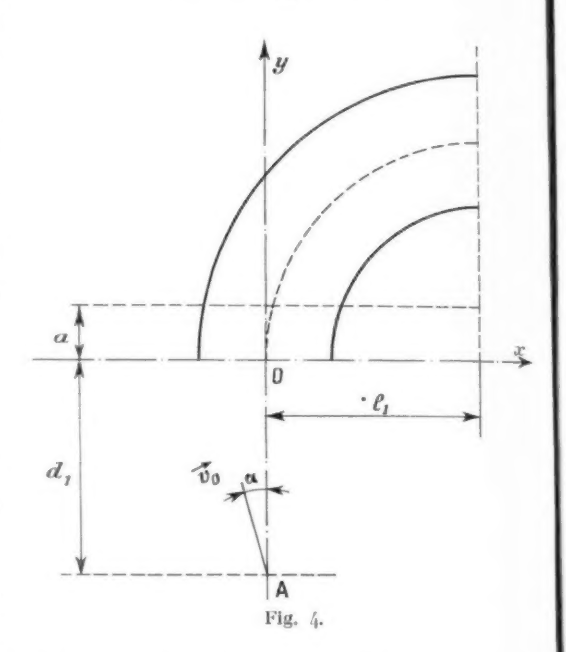


Fig. 4.

Si l'on connaît une primitive de $H(y)$, soit

$$(11)\qquad F(y) = \int H(y)\,dy,$$

on intègre la première équation (9)

$$(12)\qquad \dot{x} = \frac{e}{m} F + \text{const.},$$

or

$$(13)\qquad F = \int \frac{H_0}{1 + \left(\frac{y - a}{2a}\right)^2} dy = 2a H_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{y - a}{2a}\right),$$

donc (12) devient

$$(14)\qquad \dot{x} = 2a \frac{e}{m} H_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{y - a}{2a}\right) + \text{const.}$$

La constante est immédiatement obtenue pour

$y_0 = -d_1$, d'où

$$(15)\quad \dot{x} = 2a\frac{e}{m}H_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{2a}\right) + \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\sin\alpha + 2a\frac{e}{m}H_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right).$$

L'intégration est poursuivie à l'aide de l'intégrale première (10), d'où

$$(16)\quad \mathrm{d}x = \pm \frac{\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}}\right)^2}},$$

où $\dot{x}$ est une fonction de y. On a donc x par une quadrature.

Si l'on remarque que l'angle α est toujours très petit, de l'ordre du degré, il apparaît que x va rester toujours très petit devant $\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}$; on peut donc développer en série l'inverse du radical et écrire (16) sous la forme

$$(17)\quad \mathrm{d}x = \pm\left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}}\right)^5 + \ldots\right]\mathrm{d}y$$

et comme l'on va du point A ($y = -d_1$) à l'entrée du champ constant ($y = a$), on a

$$(18)\quad x = \pm\int_{-d_1}^{+a}\frac{\dot{x}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}} \pm \frac{1}{2}\int_{-d_1}^{+a}\frac{\dot{x}^3}{\left(\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\right)^3}\mathrm{d}y + \ldots.$$

Le double signe signifie qu'on n'a fixé ni le signe des charges en mouvement, ni le sens du vecteur induction magnétique.

1.2.2. Application au cas ou l'on suppose $\alpha = 0$ et le spectromètre réglé pour la masse choisie. — Dans ce cas on a $l_1 = \rho$ et ρ et V_0 sont liés à H_0 par

$$(19)\quad \frac{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}}{\rho} = \frac{e}{m}H_0.$$

L'élément qui figure sous le signe somme est

$$(20)\quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}} = \frac{2a}{\rho}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{2a}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right)\right],$$

quantité nulle au point A et qui reste petite pour $y = +a$.

Évaluons-là pour $\rho = l_1 = d_1 = 200$ mm et $2a = 12$ mm,

$$(21)\quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}} = \frac{12}{100}\operatorname{arctg}\frac{206}{12} \# 0{,}09.$$

Cette quantité n'atteignant pas 1/10e au moment de l'entrée dans la zone de champ uniforme, on pourra négliger dans (18) tous les termes d'ordre supérieur au premier. D'où

$$(22)\quad x = \pm\frac{2a}{\rho}\left[\int_{-d_1}^{+a}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-a}{2a}\right)\mathrm{d}y + (d_1+a)\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right)\right]$$

et tous calculs faits :

$$(23)\quad x = \pm\frac{4a^2}{\rho}\operatorname{Log}\sqrt{1+\left(\frac{d_1+a}{2a}\right)^2}.$$

Exemple numérique. — Pour

$$d_1 = \rho = 200 \text{ mm} \quad \text{et} \quad a = 6 \text{ mm},$$

on trouve

$$|x| \# 2 \text{ mm}.$$

D'où la figure 5. La trajectoire est déportée vers

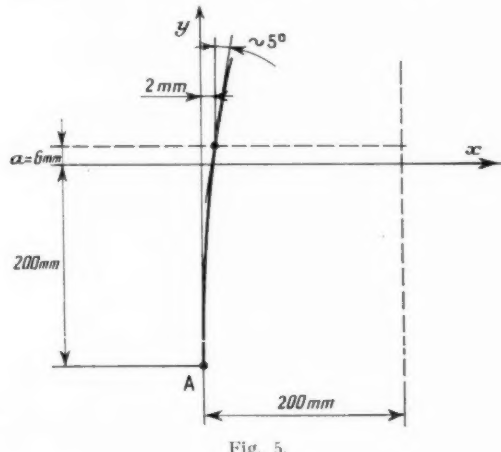


Fig. 5.

la droite de 2 mm à son entrée dans la zone de champ uniforme et son angle d'incidence est de l'ordre de 5°.

1.3. Application au calcul de l'imagerie dans le cas général.

1.3.1. ÉTABLISSEMENT DES RELATIONS GÉNÉRALES. — On calcule l'imagerie comme on l'a déjà fait à plusieurs reprises dans la première partie, compte tenu des résultats obtenus au chapitre 1.2.

Sur la figure 6 on retrouve le quadrant $x'PQ$ occupé par les pièces polaires. La zone de champ uniforme étant celle du quadrant $x'_1 P_1Q_1$. Les nouvelles frontières étant à a des précédentes. L'ion issu de A qui coupait x'_1P_1 en B' quand le champ était idéal, coupe maintenant en B $(x_1\, a)$. Ensuite sa

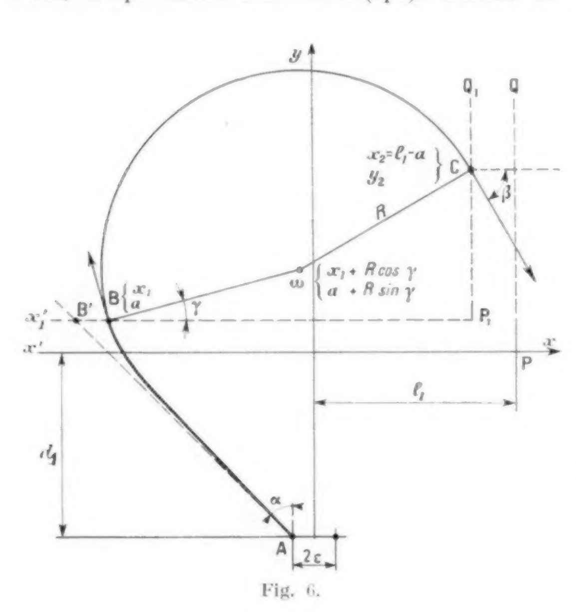


Fig. 6.

trajectoire est circulaire de rayon R, trajectoire qui coupe P_1Q_1 en C $(l_1 - a,\ y_2)$. Hors de cette région la trajectoire est à nouveau un arc de courbe, le champ magnétique étant décroissant.

Le centre de la trajectoire circulaire est $\omega(x_1 + R\cos\gamma,\ a + R\sin\gamma)$, où γ est l'angle de la trajectoire en B avec Oy.

La trajectoire circulaire a pour équation

$$[x - (x_1 + R\cos\gamma)]^2 + [y - (a + R\sin\gamma)]^2 = R^2. \tag{24}$$

Si dans (24), on fait $x = x_2 = l_1 - a$, on obtient l'ordonnée du point C, d'où

$$[l_1 - a - (x_1 + R\cos\gamma)]^2 + [y_2 - (a + R\cos\gamma)]^2 = R^2 \tag{25}$$

on aura y_2 si l'on connaît γ et x_1.

Pour γ, on a immédiatement

$$\operatorname{tg}\gamma = -\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)_{y=+a}. \tag{26}$$

Or, $\dot{x}$ est donné par (15) et $\dot{y}$ par (10), on a ainsi

$$(\dot{x})_{y=+a} = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\sin\alpha + 2a\frac{e}{m}H_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right) \tag{27}$$

et

$$(\dot{y})_{y=+a} = \sqrt{\left\{\frac{2e}{m}V_0 - \left[\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\sin\alpha + 2a\frac{e}{m}H_0\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right)\right]^2\right\}}. \tag{28}$$

Ces deux expressions se simplifient si l'on tient compte de (19)

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\left[\frac{2a}{R}\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right) + \sin\alpha\right]. \tag{27 bis}$$

$$\dot{y}_1 = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0} \times \sqrt{\left\{1 - \left[\frac{2a}{R}\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right) + \sin\alpha\right]^2\right\}}. \tag{28 bis}$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned} \sin\gamma &= -\left[\frac{2a}{R}\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right) + \sin\alpha\right], \\ \cos\gamma &= \sqrt{1 - \left[\frac{2a}{R}\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right) + \sin\alpha\right]^2}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Le signe — provient de la convention de prendre α négatif dans le cas de la figure 6.

On a immédiatement

$$x_1 = -\varepsilon + \int_{-d_1}^{+a} \frac{\dot{x}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}}, \tag{30}$$

en se limitant au terme du premier ordre, d'où

$$x_1 = -\varepsilon + \frac{4a^2}{R}\operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\frac{d_1+a}{2a}\right)^2} + (a + d_1)\sin\alpha. \tag{31}$$

Pour faciliter l'écriture, on pose

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right) &= f, \\ \operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\frac{d_1+a}{2a}\right)^2} &= g, \\ \sqrt{1 - \frac{4a^2f^2}{R^2}} &= h. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

On peut alors déterminer y_2 sous la forme d'un développement en série

$$(33) \qquad y_2 = u + v\alpha + w\alpha^2 + \varpi\alpha^3$$

en portant dans (25) les expressions (29) de $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$ et l'expression (31) de x_1.

Pour des raisons de commodité on pose

$$(34) \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{u} &= R(1+h) - l_1 - \varepsilon + a + \frac{4a^2 g}{R}, \\ \bar{v} &= R(1-h) + l_1 + \varepsilon - a - \frac{4a^2 g}{R}, \\ \bar{w} &= Rh - l_1 - \varepsilon + a + \frac{4a^2 g}{R}. \end{aligned}\right.$$

On obtient

$$(35) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= a - 2af + \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}, \\ v &= \frac{\bar{w}}{\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}}\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right] - R, \\ w &= \frac{R\bar{w}}{2h^2\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}} - \frac{\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]^2 [\bar{w}^2 + \bar{u}\cdot\bar{v}]}{2\bar{u}\cdot\bar{v}\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}}, \\ \varpi &= \frac{R}{6} - \frac{R(\bar{w}^2 + \bar{u}\cdot\bar{v})\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]}{2h^2\bar{u}\cdot\bar{v}\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}} \\ &\quad + \frac{\bar{w}(\bar{w}^2 + \bar{u}\cdot\bar{v})\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]^3}{2\bar{u}^2\cdot\bar{v}^2\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}} \\ &\quad + \frac{\bar{w}\left[\frac{a+d_1}{6} - \frac{af(h^4-3)}{3h^5}\right]}{\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}}, \end{aligned}\right.$$

y_2 est donc entièrement déterminé.

La trajectoire au-delà du point C (*fig.* 6) nécessite la connaissance de l'angle dont la tangente est l'inverse changé de signe de la pente de la droite ωC, on a donc

$$(36) \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{l_1 - a - (x_1 + R\cos\gamma)}{y_2 - (a + R\sin\gamma)},$$

où tout les termes sont connus.

On obtient

$$(37) \qquad \sin\beta = -\frac{1}{R}\left\{-\bar{w} + \left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]\alpha + \frac{R}{2h^3}\alpha^2 + \left[\frac{a+d_1}{6} - \frac{af(h^4-3)}{3h^5}\right]\alpha^3\right\}.$$

Si l'on fait le transport des axes,

$$X = x - l_1,$$
$$Y = y - y_2,$$

dans ce nouveau système le débordement du champ magnétique est

$$(38) \qquad H(X) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{X+a}{2a}\right)^2}.$$

Si l'on refait les calculs du paragraphe 1.2.1 avec les mêmes approximations, on a

$$(39) \qquad \dot{Y} = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\left[-\frac{2a}{R}\operatorname{arctg}\left(\frac{X+a}{2a}\right) + \sin\beta\right]$$

et

$$(40) \qquad Y = \int_{-a}^{X} \frac{\dot{Y}\,dX}{\sqrt{\frac{2e}{m}V_0}},$$

d'où

$$(41) \qquad Y = \frac{4a^2}{R}\operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\frac{X+a}{2a}\right)^2} - \frac{2a}{R}(X+a)\operatorname{arctg}\left(\frac{X+a}{2a}\right) + (X+a)\sin\beta$$

et en revenant aux axes primitifs :

$$(42) \qquad \begin{aligned} y &= u + v\alpha + w\alpha^2 + \varpi\alpha^3 \\ &\quad + \frac{4a^2}{R}\operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\frac{x - l_1 + a}{2a}\right)^2} \\ &\quad - \frac{2a}{R}(x - l_1 + a)\operatorname{arctg}\left(\frac{x - l_1 + a}{2a}\right) \\ &\quad + (x - l_1 + a)\sin\beta, \end{aligned}$$

avec $\sin\beta$ donné par (37), les u, v, w, ϖ par (35) et $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ par (34).

Point stigmatique au premier ordre. — La relation (42) est l'équation des trajectoires au-delà du point C, elles ne dépendent que du paramètre α.

Si l'on se limite aux termes du premier ordre et qu'on dérive par rapport au paramètre, on obtient

$$(43) \qquad x = l_1 - a + \frac{R\bar{w}}{\sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}}} - \frac{R^2}{\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]},$$

il y correspond l'y suivant :

$$(44) \qquad \begin{aligned} y &= a - 2af + \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{v}} \\ &\quad + \frac{4a^2}{R}\operatorname{Log}\sqrt{1 + \frac{v^2R^2}{4a^2\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]^2}} \\ &\quad - \frac{2av}{\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]} \\ &\quad \times \operatorname{arctg}\left(\frac{vR}{2a\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]}\right) \\ &\quad + \frac{v\bar{w}}{\left[\frac{2af}{h} - (a+d_1)\right]}. \end{aligned}$$

Aberration du second ordre. — Si l'on garde dans (42) les termes du second ordre en α et qu'on coupe par la droite (43) on obtient l'aberration du second ordre

$$(45)\qquad S = \left[w - \frac{Rv}{2h^3\left[\dfrac{2af}{h} - (a + d_1)\right]} \right] \alpha^2.$$

On possède ainsi tous les éléments nécessaires à la discussion.

1.3.2. Conséquences du débordement du champ. — *a.* Supposons l'aimant mis en place de manière qu'on ait $l_1 = d_1 = \rho$ et qu'on opère avec la masse pour laquelle le spectromètre est réglé, d'où $R = \rho$.

Faisons $\varepsilon = 0$ (centre de la fente), on a

$$(46)\qquad \begin{cases} u = \qquad \rho h + a + \dfrac{4a^2 g}{\rho}, \\ v = 2\rho - \rho h - a - \dfrac{4a^2 g}{\rho}, \\ w = \rho h - \rho \ + a + \dfrac{4a^2 g}{\rho} \end{cases}$$

et

$$(47)\qquad \begin{cases} f = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\rho + a}{2a}\right), \\ g = \operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\dfrac{\rho + a}{2a}\right)^2}, \\ h = \sqrt{1 - \dfrac{4a^2 f^2}{\rho^2}}. \end{cases}$$

b. Applications numériques. — Toutes ces relations étant assez compliquées, un exemple numérique doit mener plus rapidement à une conclusion. Avec $\rho = d_1 = l_1 = 200$ mm et $a = 6$ mm, on a

$$(48)\qquad \begin{cases} f \sim \dfrac{3}{2}, \\ h \sim 1, \\ g \sim 2,82, \\ \dfrac{4a^2 g}{\rho} \# 2,03 \end{cases}$$

d'où la position de l'image

$$x = 414,8 \text{ mm},$$
$$y = 178,7 \text{ mm}$$

et l'aberration du second ordre

$$S = 195,1\,\alpha^2 \text{ mm}.$$

Dans les mêmes conditions sans débordement de champ on a pour la position de l'image

$$x = 400 \text{ mm},$$
$$y = 200 \text{ mm}$$

et pour l'aberration

$$S = 200\,\alpha^2 \text{ mm}.$$

On peut donc conclure que :

Le débordement du champ magnétique a pour effet de détruire la symétrie de l'appareil en modifiant

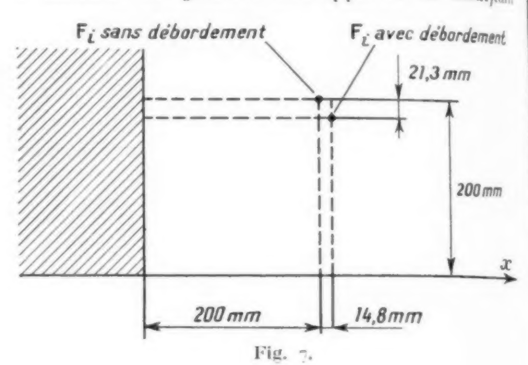


Fig. 7.

notablement la position de l'image, sans altérer sensiblement l'amplitude de l'aberration du second ordre (*fig.* 7).

1.3.3. Correction des effets du débordement. — On peut chercher à retrouver la symétrie de l'appareil par un positionnement convenable de l'aimant [3].

Elle sera réalisée si

$$(49)\qquad \begin{cases} x = l_1 + d_1, \\ y = l_1. \end{cases}$$

Si l'on porte dans (43) et (44) on obtient deux relations ne contenant que les quantités R et a et qui permettent de déterminer l_1 et d_1. On doit faire l'hypothèse que d_1 ne varie que peu autour de la valeur ρ, et alors l'arctg et le Log ne varieront pratiquement pas.

Si l'on suppose de plus $\varepsilon = 0$ (centre de la fente), on a

$$(50)\qquad \begin{cases} d_1 + a + \dfrac{\rho^2}{2a - d_1} = \dfrac{\rho w}{\sqrt{u.v}}, \\ l_1 = -2a + \sqrt{u.v} \\ \qquad + \dfrac{4a^2}{\rho}\operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\dfrac{d_1 + a}{2a}\right)^2} \\ \qquad - \dfrac{2a}{\rho}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{d_1 + a}{2a}\right) + \dfrac{w(d_1 + a)}{\rho}, \end{cases}$$

l_1 et d_1 restent voisins de ρ, on pose

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d_1}{\rho} &= 1 + \frac{p}{\rho}, \\ \frac{l_1}{\rho} &= 1 + \frac{q}{\rho} \end{aligned}\right.$$

et l'on traite p et q comme des infiniment petits.

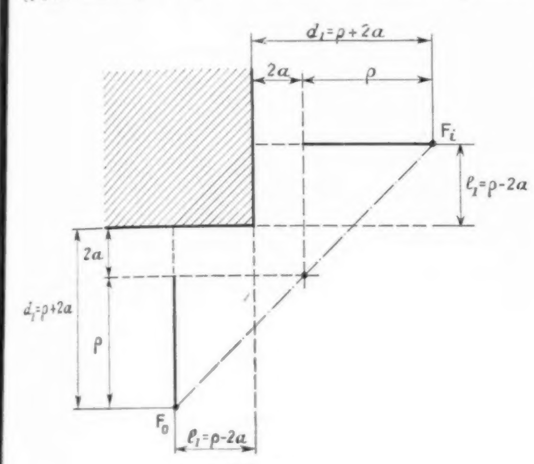


Fig. 8.

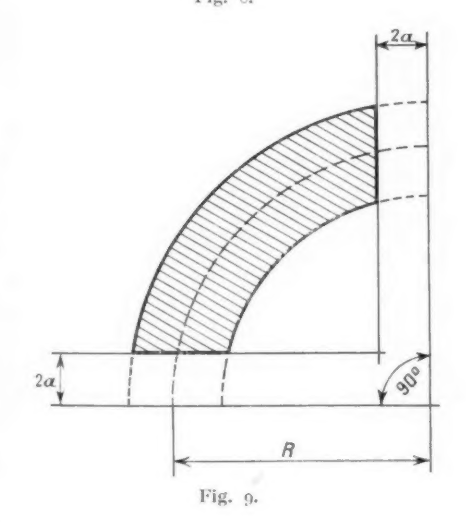


Fig. 9.

Si l'on tient compte de (34) et de (50) en se limitant au premier ordre en p et q on obtient

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} 2p + q &= 2a, \\ q &= -2a, \end{aligned}\right.$$

ce qui conduit à

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} d_1 &= \rho + 2a, \\ l_1 &= \rho - 2a. \end{aligned}\right.$$

On voit donc que tout se passe comme si, sans changer les positions respectives de la fente source et de la fente collectrice, on déplaçait l'aimant parallèlement à lui-même dans chacune des deux directions perpendiculaires d'une quantité égale à la grandeur de l'entrefer; on peut dire que l'effet du débordement du champ sur la symétrie est annulé par un recul de l'aimant (*fig.* 8).

Il s'ensuit que les pièces polaires d'un spectromètre de masse à 90° sont à tracer comme l'indique la figure 9, pour que le faisceau reste centré sur les faces.

Démonstration directe. — On peut montrer directement la nécessité du recul de l'aimant pour

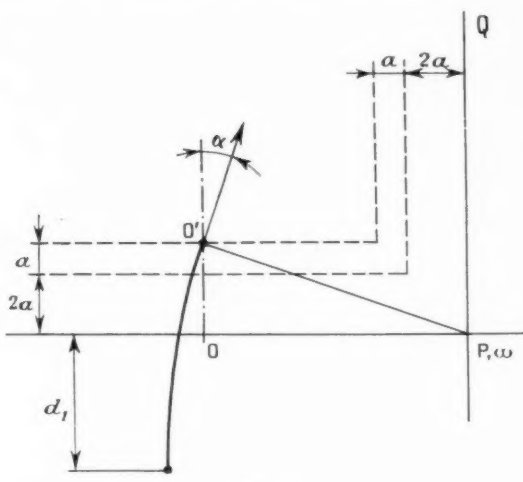


Fig. 10.

conserver la symétrie. En effet la projection de la vitesse sur l'axe Ox à l'entrée du champ uniforme est

$$(\dot{x})_{y=-a} = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\,\frac{2a}{\rho}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{d_1+a}{2a}\right),$$

or, on a vu que l'arc tg est de l'ordre de $\frac{2}{3}$, donc

$$(\dot{x})_{y=+a} = \sqrt{\frac{2e}{m}V_0}\,\sin\alpha = \frac{3a}{\rho}\sqrt{\frac{2e}{m}V_0},$$

et par suite on a

$$(54)\qquad \alpha \sim \frac{3a}{\rho},$$

où α est l'angle indiqué sur la figure 10.

Le système devant être symétrique, le recul l'est et le rayon restant ρ, le centre du cercle ω est donc en P.

La longueur OO′ est alors $\rho \sin\alpha \sim 3a$, ce qui correspond bien au recul de l'aimant d'une quan-

tité $2a$ auquel on ajoute a pour être dans la zone de champ constant.

1.3.4. Imagerie dans le cas où le recul est effectué. — On va supposer les relations (53) satisfaites, et les masses des ions assez grandes pour pouvoir traiter $\frac{d\rho}{\rho}$ comme un infiniment petit. On pose (*cf.* Ire partie, § 6.1 et 8.2)

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\rho} = n, \\ \dfrac{d\rho}{\rho} = p; \end{cases}$$

on obtient ainsi en tenant compte de (48)

$$(56)\qquad \begin{cases} u = \rho\left[1 + 2p - n + \dfrac{3a}{\rho} + \dfrac{4a^2 g}{\rho^2}\right], \\ v = \rho\left[1 + \qquad n - \dfrac{3a}{\rho} - \dfrac{4a^2 g}{\rho^2}\right], \\ w = \rho\left[\qquad p - n + \dfrac{3a}{\rho} + \dfrac{4a^2 g}{\rho^2}\right]; \end{cases}$$

$$(57)\qquad \begin{cases} u = \rho(1 + p) - 2a, \\ v = -\rho\left[1 + 2p - n + \dfrac{3a}{\rho}\right], \\ w = -\dfrac{\rho}{2}\left[1 - 2p + n - \dfrac{3a}{\rho}\right], \\ \varpi = \dfrac{\rho}{6}\left[4 - p + 2n - \dfrac{6a}{\rho}\right]. \end{cases}$$

Si l'on porte dans (37) puis dans (42) on peut calculer toute l'imagerie du système. Le point stigmatique au premier ordre est

$$(58)\qquad \begin{cases} x_i = \qquad 2\rho + \rho(3p - n), \\ y_i = \rho - 2a + \rho(2p - n) \end{cases}$$

qui sont, au recul près, les formules obtenues dans la première partie [§ 8.2, formules (33)].

L'aberration du second ordre est

$$(59)\qquad S = \rho\left(1 + \frac{p}{2}\right)\alpha^2$$

et l'aberration du troisième ordre est

$$(60)\qquad T = -\frac{\rho}{2}\left[1 - p + n - \frac{6a}{\rho}\right]\alpha^3.$$

On peut donc conclure que la compensation du débordement du champ magnétique par le recul convenable de l'aimant ramène la symétrie, sans modifier sensiblement l'imagerie calculée avec un champ idéal.

2. INFLUENCE D'UNE VARIATION RADIALE DU CHAMP MAGNÉTIQUE.

2.1. Intérêt de l'étude.

La focalisation de particules chargées dans un champ magnétique non homogène a été étudiée par différents auteurs [5], [6], [7] avec pour objectif l'amélioration de la focalisation, soit dans une direction, soit dans deux directions perpendiculaires.

Le problème se pose différemment pour nous, cherchant seulement à savoir si la non-uniformité du champ magnétique présente des avantages ou des inconvénients et dans ce dernier cas les limites pratiquement tolérables.

On suppose que le champ magnétique est limité à une portion de couronne circulaire, qu'il reste de révolution, mais qu'il varie légèrement quand on se déplace le long d'un rayon vecteur.

C'est un cas analogue à celui traité par les auteurs de la référence [7] et nous adopterons leurs méthodes de calcul.

2.2. Expression des composantes du champ magnétique.

Le champ magnétique étant supposé de révolution, on ne considère que les composantes H_z et H_r (*fig.* 11).

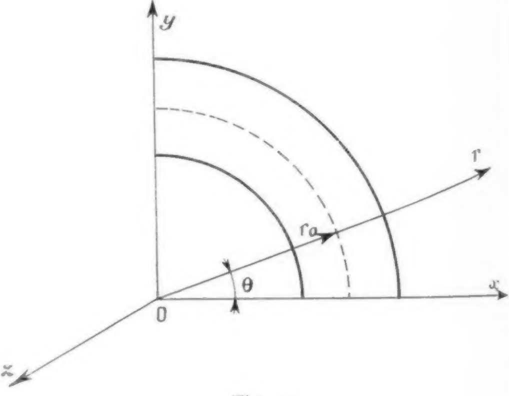


Fig. 11.

On développe chacune de ces composantes autour de $r = r_0$ et de $z = 0$, correspondant à la trajectoire moyenne

$$(61)\qquad \begin{cases} H_z = H_0[1 - a_{10}z - a_{01}(r - r_0) - a_{20}z^2 \\ \qquad - a_{11}(r - r_0)z - a_{02}(r - r_0)^2 + \ldots], \\ H_r = H_0[b_{00} + b_{10}z + b_{01}(r - r_0) \\ \qquad + b_{20}z^2 + b_{11}(r - r_0)z \\ \qquad + b_{02}(r - r_0)^2 + \ldots]. \end{cases}$$

Le plan $z = 0$ étant de symétrie, H_z ne contient que des termes pairs. Quant à H_r il doit être identiquement nul dans le plan de symétrie quel que soit $r - r_0$. En se limitant au second ordre et en écrivant que

$$(62)\quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = 0, \\ \text{div}\, \vec{H} = 0, \end{cases}$$

on obtient

$$(63)\quad \begin{cases} H_z = H_0\left[1 - p\left(\frac{r - r_0}{r_0}\right) + p\left(\frac{z}{r_0}\right)^2 - \frac{p}{2}\left(\frac{r - r_0}{r_0}\right)^2\right], \\ H_r = -H_0 p\left(\frac{z}{r_0}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{cases}$$

et dans le plan de symétrie

$$(64)\quad \begin{cases} H_z = H_0\left[1 - p\left(\frac{r - r_0}{r_0}\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{r - r_0}{r_0}\right)^2\right], \\ H_r = 0. \end{cases}$$

2.3. **Intégration des équations du mouvement.**

En coordonnées semi-polaires le mouvement est entièrement déterminé par les deux équations

$$(65)\quad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{e}{m} r\dot{\theta} H_0\left[1 - p\left(\frac{r - r_0}{r_0}\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{r - r_0}{r_0}\right)^2\right], \\ \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{2e}{m} V_0. \end{cases}$$

On remarque d'abord que $r = r_0 = \text{const.}$ n'est solution que si l'on a

$$(66)\quad \dot{\theta} = \frac{e}{m} H_0 = \frac{\sqrt{\frac{2e}{m} V_0}}{r_0} = \omega_0.$$

Pour résoudre, on pose

$$(67)\quad \begin{cases} r = r_0 + \lambda\rho_1 + \lambda^2\rho_2, \\ \dot{\theta} = \omega_0 + \lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2, \end{cases}$$

où λ définit l'ordre d'infinitude de l'approximation.

Si l'on porte (67) dans la deuxième relation (65)

$$(68)\quad \lambda^0 : \quad \omega_0^2 r_0^2 = \frac{2e}{m} V_0.$$

$$(69)\quad \lambda^1 : \quad \omega_0 \dot{\rho}_1 + r_0 \theta_1 = 0.$$

$$(70)\quad \lambda^2 : \quad \dot{\rho}_1^2 + \omega_0^2(\rho_1^2 + 2 r_0 \rho_2) + 4 r_0 \omega_0 \rho_1 \theta_1 + r_0^2(\theta_1^2 + 2\omega_0\theta_2) = 0$$

et si l'on porte (67) dans la première relation (65)

$$(71)\quad \lambda^1 : \quad \ddot{\rho}_1 - \omega_0 r_0 \theta_1 - \omega^2 p \rho_1 = 0.$$

$$(72)\quad \lambda^2 : \quad \ddot{\rho}_2 - \omega_0 r_0 \theta_2 - r_0 \theta_1^2 - \omega_0(1 + p)\rho_1\theta_1 - \omega_0^2 p \rho_2 - \frac{3\omega_0^2 p \rho_1^2}{2 r_0} = 0.$$

De (69) on tire θ_1 qui porté dans (71) conduit à l'équation différentielle

$$(73)\quad \ddot{\rho}_1 + \omega_0^2(1 - p)\rho_1 = 0$$

dont la solution est

$$(74)\quad \rho_1 = A\cos\omega_0\sqrt{1 - p}\,t + B\sin\omega_0\sqrt{1 - p}\,t.$$

$$(75)\quad \theta_1 = -\frac{\omega_0}{r_0}\left[A\cos\omega_0\sqrt{1 - p}\,t + B\sin\omega_0\sqrt{1 - p}\,t\right].$$

Ces valeurs portées dans (70) puis dans (72) conduisent à

$$(76)\quad \theta_2 = \frac{2\omega_0^2\rho_1^2 - 2\omega_0^2 r_0\rho_2 - \dot{\rho}_1^2}{2\omega_0 r_0^2},$$

$$(77)\quad \ddot{\rho}_2 + \omega_0^2(1 - p)\rho_2 = \frac{1}{2 r_0}\left[\omega_0^2(p + 2)\rho_1^2 - \dot{\rho}_1^2\right].$$

L'intégrale générale de (77) ne diffère pas de celle de (73) et se confond avec elle, on ne s'attache donc qu'à la solution particulière.

Si l'on pose $\varpi_0 = \omega_0\sqrt{1 - p}$, cette solution particulière est

$$(78)\quad \rho_2 = \frac{\omega_0^2}{4 r_0 \varpi_0^2}\left[(2p + 1)(A^2 + B^2) - (A^2 - B^2)\cos 2\varpi_0 t - 2AB\sin 2\varpi_0 t\right].$$

$$(79)\quad \theta_2 = \frac{\omega_0}{r_0^2}\left[\frac{A^2 - B^2}{2}\cos 2\varpi_0 t + \frac{A^2 + B^2}{2} + AB\sin 2\varpi_0 t\right] - \frac{\varpi_0^2}{2\omega_0 r_0^2}\left[\frac{A^2 + B^2}{2} - \frac{A^2 - B^2}{2}\cos 2\varpi_0 t - AB\sin 2\varpi_0 t\right] - \frac{\omega_0^3}{4 r_0^2 \varpi_0^2}\left[(2p + 1)(A^2 + B^2) - (A^2 - B^2)\cos 2\varpi_0 t - 2AB\sin 2\varpi_0 t\right].$$

Enfin, après arrangements et intégrations des θ_1 et θ_2 :

$$(80)\quad r = r_0 + A\cos\varpi_0 t + B\sin\varpi_0 t + \frac{1}{4 r_0(1 - p)}\left[(2p + 1)(A^2 + B^2) - (A^2 - B^2)\cos 2\varpi_0 t - 2AB\sin 2\varpi_0 t\right].$$

$$(81)\quad \theta = \omega_0 t\left[1 - \frac{p(p + 2)(A^2 + B^2)}{4 r_0^2(1 - p)}\right] - \frac{1}{r_0\sqrt{1 - p}}\left[A\sin\varpi_0 t - B\cos\varpi_0 t\right] + \frac{(p - 2)^2(A^2 - B^2)}{8 r^2(1 - p)^{\frac{3}{2}}}\sin 2\varpi_0 t - \frac{(p - 2)^2 AB}{4 r_0^2(1 - p)^{\frac{3}{2}}}\cos 2\varpi_0 t + \text{const.}$$

Pour continuer le calcul, il faut introduire les conditions initiales. Si l'on se reporte à la figure 12, l'ion au lieu d'entrer normalement à Ox au point d'abscisse r_0, rentre un peu plus loin au point d'abscisse $r_0 + \delta r$ avec un angle faible φ (on pose $\delta\varphi = \sin\varphi$) à l'instant $t = 0$ avec $\theta = 0$.

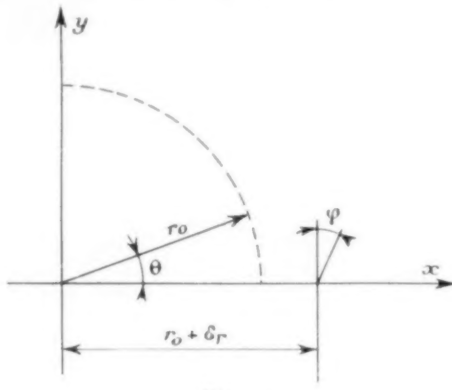


Fig. 12.

Ces conditions initiales permettent de déterminer A et B ainsi que la valeur de la constante de la relation (81) qui est

$$\frac{(p-2)^2 AB}{4 r_0^2 (1-p)^{\frac{3}{2}}} - \frac{B}{r_0 (1-p)^{\frac{1}{2}}}. \tag{82}$$

Les calculs sont simplifiés en développant A et B en série et en se limitant aux termes du second ordre en δr et $\delta\varphi$,

$$\left\{\begin{aligned} A &= a_{10}\,\delta r + a_{01}\,\delta\varphi + a_{20}\,\delta r^2 + a_{11}\,\delta r\,\delta\varphi + a_{02}\,\delta\varphi^2, \\ B &= b_{10}\,\delta r + b_{01}\,\delta\varphi + b_{20}\,\delta r^2 + b_{11}\,\delta r\,\delta\varphi + b_{02}\,\delta\varphi^2 \end{aligned}\right. \tag{83}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} A &= \delta r - \frac{p}{2 r_0 (1-p)}\,\delta r^2 - \frac{(p+1) r_0}{2(1-p)^2}\,\delta\varphi^2, \\ B &= \frac{r_0}{\sqrt{1-p}}\,\delta\varphi + \frac{1}{(1-p)\sqrt{1-p}}\,\delta\varphi\,\delta r, \end{aligned} \tag{84}$$

d'où les quantités

$$\left\{\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \delta r^2 + \frac{r_0^2}{1-p}\,\delta\varphi^2, \\ A^2 - B^2 &= \delta r^2 - \frac{r_0^2}{1-p}\,\delta\varphi^2, \\ AB &= \frac{r_0}{\sqrt{1-p}}\,\delta r\,\delta\varphi. \end{aligned}\right. \tag{85}$$

Ainsi r et θ sont connus en fonction des conditions initiales.

2.4. **Application au spectromètre de masse.**

Dans le cas particulier, objet de cette étude, on a d'après la figure

$$\left\{\begin{aligned} \delta r &= d_1 \operatorname{tg}\alpha \sim d_1\,\alpha, \\ \delta\varphi &= \sin\alpha \sim \alpha, \end{aligned}\right. \tag{86}$$

qu'on porte dans (80) et (81) compte tenu de (84) et (85).

Les conditions initiales correspondent à $\theta = 0$, point B de la figure 13; on cherche les coordonnées du point C, qui correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En fait $\varpi_0 t$ ne diffère pas beaucoup de $\frac{\pi}{2}$ et l'on peut écrire

$$\varpi_0 t = \omega_0 \sqrt{1-p} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \tag{87}$$

en considérant ε comme un infiniment petit et en se limitant au second ordre en ε.

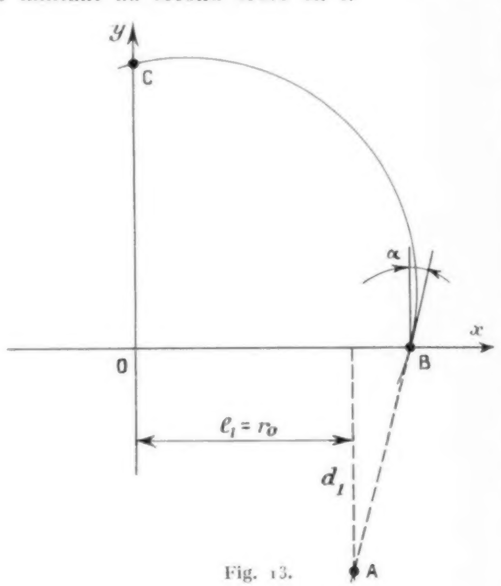


Fig. 13.

La relation (87) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ conduit à l'équation (88) qui détermine ε,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{p\pi}{4} &- \left[\left(1 + \frac{p}{2}\right)\frac{d_1}{r_0} + 1 + p\right]\alpha \\ &+ \left[\frac{p}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{d_1^2}{r_0^2} + \frac{d_1}{r_0} + \frac{\left(1 + \frac{7p}{2} - \frac{\pi p}{2}\right)}{2}\right]\alpha^2 \\ &+ \varepsilon \left\{ \left(1 + \frac{p}{2}\right) - (1+p)\alpha \right. \\ &\qquad \left. - \left[(1+p)\frac{d_1^2}{r_0^2} + (1+2p)\frac{d_1}{r_0} - (1+p)\right]\alpha^2 \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{\left(1 + \frac{p}{2}\right)}{2}\frac{d_1}{r_0}\alpha \right. \\ &\qquad \left. - \left[\frac{p}{4}\frac{d_1^2}{r_0^2} + 2(1+p)\frac{d_1}{r_0} + \frac{\left(1 + \frac{7p}{2}\right)}{4}\right]\alpha^2 \right\} \end{aligned} \tag{88}$$

qu'on résoud facilement en posant

$$z = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2$$

et l'on trouve

$$(89)\quad \begin{cases} a_0 = -\dfrac{p\pi}{4}, \\ a_1 = \dfrac{d_1}{r_0} + 1 + \dfrac{p(2-\pi)}{4}, \\ a_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2} + \dfrac{\pi p}{4} + p\dfrac{d_1}{r_0} - \dfrac{p}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{d_1^2}{r_0^2}. \end{cases}$$

Les conditions au point C sont ainsi entièrement déterminées, et les trajectoires rectilignes au-delà de C en fonction de α sont facilement obtenues.

On trouve pour l'ordonnée du point C

$$(90)\quad y_C = r_0 + \left[r_0\left(1 + \frac{p}{2}\right) + \frac{p\pi}{4}d_1\right]\alpha + \left[\left(-\frac{1}{2} + p\right)\frac{d_1^2}{r_0} + p\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)d_1 + p\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)r_0\right]\alpha^2.$$

La pente des trajectoires rectilignes est

$$(91)\quad \mathrm{tg}\,\beta = \left(\frac{\dot r}{r\dot\theta}\right)_{\text{au point C}}$$

et les droites sont

$$(92)\quad y - y_C = x\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

on obtient facilement

$$(93)\quad \mathrm{tg}\,\beta = \left[-\frac{d_1}{r_0} + \frac{p}{2}\frac{d_1}{r_0} + \frac{p\pi}{4}\right]\alpha + \left[\frac{p}{2}\frac{d_1^2}{r_0^2} + p\frac{d_1}{r_0} - \frac{\left(1 - \frac{3p}{2}\right)}{2}\right]\alpha^2,$$

d'où les trajectoires rectilignes cherchées

$$(94)\quad y = r_0 + r_0\left[1 + \frac{p}{2} + \frac{p\pi}{4}\frac{d_1}{r_0}\right]\alpha + r_0\left[\left(-\frac{1}{2} + p\right)\frac{d_1^2}{r_0^2} + p\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d_1}{r_0} + p\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right]\alpha^2 + x\left\{\left[-\frac{d_1}{r_0} + \frac{p}{2}\frac{d_1}{r_0} + \frac{p\pi}{4}\right]\alpha + \left[\frac{p}{2}\frac{d_1^2}{r_0^2} + p\frac{d_1}{r_0} - \frac{\left(1 - \frac{3p}{2}\right)}{2}\right]\alpha^2\right\}.$$

a. Point stigmatique au premier ordre. — Si l'on suppose p assez petit, le point stigmatique au premier ordre est

$$(95)\quad \begin{cases} x = \dfrac{r_0^2}{d_1}\left[1 + \dfrac{p}{2}\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{d_1}{r_0} + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{r_0}{d_1}\right)\right], \\ y = r_0 \end{cases}$$

et dans le cas particulier où $d_1 = r_0$,

$$(96)\quad \begin{cases} x = r_0\left[1 + \left(\dfrac{2+\pi}{2}\right)p\right], \\ y = r_0. \end{cases}$$

b. Aberration du second ordre. — On porte dans (94) la valeur de x donnée par (95), d'où

$$(97)\quad S = \left\{\frac{d_1^2 + r_0^2}{2r_0 d_1} - p\left[\frac{d_1^2}{r_0} + d_1\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}r_0 + \frac{1}{4}\frac{r_0^2}{d_1} - \frac{\pi}{8}\frac{r_0^3}{d_1^2}\right]\right\}\alpha^2$$

et dans le cas particulier, $r_0 = d_1$:

$$(98)\quad S = r_0\left[1 - p\left(\frac{17}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right]\alpha^2.$$

c. Discussion. — Faisons d'abord deux remarques :

α. Le calcul précédent n'est valable que si $l_1 = r_0$ (*fig.* 13), on suppose rester dans ce cas.

β. Par construction, la distance de la fente objet à la fente collectrice est une constante de l'appareil. Dans le cas symétrique et pour un champ magnétique idéal cette distance vaut $2r_0\sqrt{2}$ si l'on n'est plus dans le cas symétrique, le champ étant toujours idéal, la distance entre la fente objet et son image est supérieure à la valeur précédente.

Si l'on compare la position de l'image de la fente objet dans le cas du champ idéal à celle qu'elle occupe dans le cas présent, on constate que, quand le champ varie radialement l'image est rapprochée ou éloignée de la face de sortie des pièces polaires, suivant le signe de p. Dans ces conditions, si la distance de la fente objet à la fente collectrice est fixée par construction, le réglage de l'appareil n'est plus correct.

On peut alors chercher la valeur qu'il faut donner à d_1 pour que la distance des deux fentes soit, par exemple, $2r_0\sqrt{2}$. D'après la remarque β, on sait d'avance qu'il faut que p soit négatif.

Pour déterminer d_1, on va supposer qu'il diffère assez peu de r_0 pour qu'on puisse écrire

$$(99)\quad d_1 = r_0(1 + u)$$

et traiter u comme un infiniment petit si l'on écrit

que la distance des fentes est $2r_0\sqrt{2}$,

$$(100)\quad \left\{\frac{r_0^2}{d_1}\left[1+\frac{p}{2}\left(2+\frac{\pi}{2}\frac{d_1}{r_0}+\frac{\pi}{2}\frac{r_0}{d_1}\right)\right]+r_0\right\}^2 + (d_1+r_0)^2 = 8r_0^2$$

et qu'on tient compte de (99) on trouve

$$(101)\quad p = -\frac{3}{2+\pi}u^2,$$

on trouve bien p négatif comme prévu, ce qui veut dire que l'image est rapprochée par rapport au cas idéal.

Si p est négatif, d'après (97) l'aberration du second ordre est accrue par rapport à ce qu'elle est dans le cas idéal. On peut donc fixer une limite à p en cherchant à ce que cet accroissement ne soit pas supérieur au 1/10e de la valeur de l'aberration, ce qui s'écrit

$$(102)\quad |p|\frac{\left[\frac{d_1^2}{r_0}+d_1\left(\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}r_0+\frac{1}{4}\frac{r_0^2}{d_1}-\frac{\pi}{8}\frac{r_0^3}{d_1^2}\right]}{\frac{d_1^2+r_0^2}{2r_0d_1}} \leq \frac{1}{10}$$

et comme u est supposé petit, on peut prendre le cas symétrique, ce qui donne

$$(103)\quad |p| \leq \frac{1}{10}\frac{1}{\frac{17}{4}+\frac{\pi}{8}} \sim \frac{2}{100},$$

à cette valeur de p correspond

$$(104)\quad u \simeq \pm 0{,}183.$$

Exemple numérique. — Pour $r_0 = 200$ mm, si l'on prend $p = -\frac{2}{100}$ la première relation (64) donne pour $r - r_0 = 10$ mm,

$$H_z \simeq H_0\left[1 \pm \frac{1}{1000}\right].$$

Ainsi, de part et d'autre de la trajectoire moyenne, il ne faut pas que le champ magnétique varie le long d'un rayon sur 10 mm *de plus de* 1/1000e *de sa valeur.*

La distance de la fente objet à la face d'entrée des pièces polaires est alors

$$d_1 = 200|1 - 0{,}183| = 200 - 36{,}6 \text{ mm}.$$

d. Conclusions. — Si l'on s'en tient à ce qui se passe dans le plan de symétrie et si l'on suppose que le champ magnétique varie le long d'un rayon vecteur tout en restant de révolution, on peut conclure que :

α. *Pour un tube analyseur donné, la variation du champ magnétique le long d'un rayon vecteur doit être telle que le champ croisse avec le rayon, si l'on veut continuer à former l'image de la fente objet sur la fente collectrice.*

β. *Dans ce cas, la symétrie ne peut plus être conservée et la fente objet doit être rapprochée ou éloignée de la face d'entrée des pièces polaires.*

γ. *Si le champ magnétique croît avec le rayon vecteur, l'amplitude de l'aberration du second ordre croît nécessairement et la limitation de cet accroissement à* 1/10e *de la valeur de cette amplitude entraîne la condition* $|p| \leq \frac{2}{100}$.

δ. *Enfin, si le champ décroît quand le rayon vecteur augmente* ($p > 0$) *il est possible de diminuer et même d'annuler l'aberration du second ordre, mais alors il faut éloigner la fente collectrice de la face de sortie des pièces polaires.*

3. INFLUENCE D'UNE VARIATION DU CHAMP MAGNÉTIQUE LE LONG DE LA TRAJECTOIRE MOYENNE.

3.1. Expression du champ.

On a vu au paragraphe 1.1 que le champ n'était certainement pas constant quand on se déplace le long de la trajectoire moyenne.

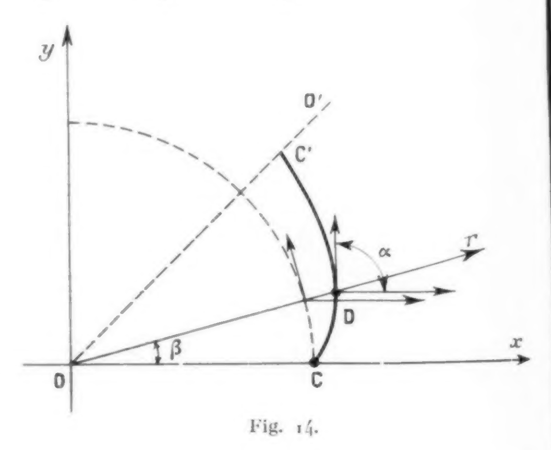


Fig. 14.

Si l'on se reporte à la figure 14, on peut dire que le champ magnétique est indépendant du rayon vecteur, mais dépend de l'angle β. Maximum sur la droite OO′ (bissectrice), il décroît quand on s'en éloigne soit vers Ox soit vers Oy.

On prendra pour expression de H

$$H = H_0\left[1 - p\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)^2\right]. \tag{105}$$

En raison de cette variation de H, la trajectoire sera par exemple CC′ dont la tangente au point D (*fig.* 14) fait l'angle α avec Ox. Cette trajectoire différant très peu de la trajectoire moyenne, on peut écrire

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} + u(x, y), \tag{106}$$

où u reste une quantité toujours petite devant α.

Si l'on porte (106) dans (105) en négligeant les termes en u^2, on a

$$H = H_0\left[1 - p\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)^2 - 2pu\right]. \tag{107}$$

3.2. Équations du mouvement.

On a immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} dx &= R\,d\alpha\cos\alpha, \\ dy &= R\,d\alpha\sin\alpha, \end{aligned}\right. \tag{108}$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire. Ce rayon de courbure est donné par

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2e}{m}V_0}}{R} = \frac{e}{m}H,$$

où H est le champ au point courant.

Pour cette même masse, on a

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2e}{m}V_0}}{R_0} = \frac{e}{m}H_0,$$

où R_0 est le rayon de la trajectoire moyenne.

(108) devient donc

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{H_0R_0}{H}\cos\alpha\,d\alpha, \\ dy &= \frac{H_0R_0}{H}\sin\alpha\,d\alpha \end{aligned}\right. \tag{109}$$

et si l'on tient compte de (107), on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} dx &= R_0\left[1 + p\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)^2 + 2pu\right]\cos\alpha\,d\alpha, \\ dy &= R_0\left[1 + p\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)^2 + 2pu\right]\sin\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right. \tag{110}$$

si l'on pose

$$|u(x, y)| \leq u_0,$$

l'intégration de (110) donne

$$\left\{\begin{aligned} x \leq{} & R_0\sin\alpha + 2pu_0R_0\sin\alpha \\ & + pR_0\int\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)^2\cos\alpha\,d\alpha + C_x, \\ y \leq{} & -R_0\cos\alpha - 2pu_0R_0\cos\alpha \\ & + pR_0\int\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)^2\sin\alpha\,d\alpha + C_y; \end{aligned}\right. \tag{111}$$

on montre facilement que

$$\left\{\begin{aligned} & \int\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)^2\cos\alpha\,d\alpha \\ & \quad = \left[\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)^2 - 2\right]\sin\alpha - 2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\cos\alpha, \\ & \int\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)^2\sin\alpha\,d\alpha \\ & \quad = -\left[\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)^2 - 2\right]\cos\alpha - 2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\sin\alpha. \end{aligned}\right. \tag{112}$$

D'où la solution cherchée

$$\left\{\begin{aligned} x \leq{} & R_0\sin\alpha + 2pu_0R_0\sin\alpha \\ & + pR_0\left\{\left[\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)^2 - 2\right]\sin\alpha \right. \\ & \left. \qquad - 2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\cos\alpha\right\} + C_x, \\ y \leq{} & -R_0\cos\alpha - 2pu_0R_0\cos\alpha \\ & - pR_0\left\{\left[\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)^2 - 2\right]\cos\alpha \right. \\ & \left. \qquad + 2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\sin\alpha\right\} + C_y. \end{aligned}\right. \tag{113}$$

Le produit pu_0 étant très petit on négligera cette quantité devant 1.

3.3. Application au cas du spectromètre.

La détermination des constantes C_x et C_y se fait à partir des conditions initiales qui sont

$$\left\{\begin{aligned} x &= R_0 + d_1\operatorname{tg}\theta_0, \\ y &= 0, \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} - \theta_0, \end{aligned}\right. \tag{114}$$

θ_0 étant une quantité petite de l'ordre du degré, on opère à l'aide de développements en série, on trouve ainsi

$$\left\{\begin{aligned} C_x ={} & -pR_0\left(\frac{\pi^2}{16} - 2\right) + d_1\theta_0 \\ & + \left(\frac{R_0}{2} + pR_0\frac{\pi^2}{32}\right)\theta_0^2 + \left(\frac{d_1}{3} + pR_0\frac{\pi}{6}\right)\theta_0^3, \\ C_y ={} & p\frac{R_0}{2} + \left(R_0 + pR_0\frac{\pi^2}{16}\right)\theta_0 \\ & + p\frac{R_0}{4}\pi\theta_0^2 + \left(p\frac{R_0}{9} - pR_0\frac{\pi^2}{96} - \frac{R_0}{6}\right)\theta_0^3. \end{aligned}\right. \tag{115}$$

Il faut maintenant déterminer l'intersection de la trajectoire courbe avec l'axe Oy et l'angle de la tangente en ce point avec Ox. On remarque qu'à cette intersection on a α voisin de π et l'on posera

$$(116) \qquad x = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = \pi + \varepsilon.$$

La détermination de ε se fait en posant

$$(117) \qquad \varepsilon = \bar{a} + \bar{b}\theta_0 + \bar{c}\,\theta_0^2 + \bar{d}\,\theta_0^3,$$

où les a, b, c, d sont des fonctions de p, p étant petit on développera en se limitant au premier ordre.

On trouve ainsi

$$(118) \quad \begin{cases} a = \left(2 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}\right)p, \\[2mm] b = \dfrac{d_1}{R_0}\left(1 - p\dfrac{\pi^2}{16}\right), \\[2mm] c = \dfrac{1}{2} + p\left[\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{d_1^2}{R_0^2}\left(1 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{32}\right)\right], \\[2mm] d = \dfrac{d_1}{3R_0} + \dfrac{d_1^2}{6R_0^2} + p\left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{d_1}{R_0}\left(1 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5}{6}\dfrac{\pi^2}{16}\right) - \dfrac{d_1^3}{3R_0^3}\left(1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{\pi^2}{16}\right)\right\}. \end{cases}$$

On en déduit l'ordonnée du point d'intersection y_c et l'équation générale des trajectoires rectilignes au-delà de ce point est

$$(119) \qquad y - y_c = x\,\mathrm{tg}(\pi + \varepsilon) = x\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \sim x\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\right),$$

on trouve ainsi

$$\begin{aligned} (120) \quad y_c = {} & R_0 - pR_0\left(2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) \\ & + R_0\left\{1 + p\left[\frac{\pi^2}{16} - \frac{d_1}{R_0}\left(2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right)\right]\right\}\theta_0 \\ & + \left\{-\frac{d_1^2}{2R_0} + p\left[\frac{d_1^2}{R_0}\frac{\pi^2}{32} - R_0\left(1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right)\right]\right\}\theta_0^2 \\ & + \left\{-\frac{d_1}{2} - \frac{R_0}{6}\right. \\ & \quad + p\left[\frac{R_0}{3} - R_0\frac{\pi^2}{96} - \frac{\pi}{6}\frac{d_1^2}{R_0^2} - d_1\frac{\pi^2}{16}\right. \\ & \quad - \frac{d_1^2}{R_0^2}\left(1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right) \\ & \quad \left.\left. - R_0\left(\frac{d_1}{3R_0} + \frac{d_1^2}{6R_0^2}\right)\left(2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right)\right]\right\}\theta_0^3, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (121) \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon \sim {} & \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\right) \\ = {} & \left(2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right)p + \frac{d_1}{R_0}\left(1 - p\frac{\pi^2}{16}\right)\theta_0 \\ & + \left\{\frac{1}{2} + p\left[\frac{\pi^2}{16} + \frac{d_1^2}{3R_0^2}\left(1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{16}\right)\right]\right\}\theta_0^2 \\ & + \left\{\frac{d_1}{3R_0} + \frac{d_1^2}{2R_0^2} + p\left[\frac{\pi}{6} + \frac{d_1}{R_0}\left(3 - \pi - \frac{\pi^2}{16}\right)\right.\right. \\ & \quad \left.\left. - \frac{d_1^3}{3R_0^3}\left(1 + \frac{9}{2}\frac{\pi^2}{16}\right)\right]\right\}\theta_0^3. \end{aligned}$$

Si dans (119) on se limite au premier ordre en θ_0, on obtient par dérivation le point stigmatique

$$(122) \quad \begin{cases} x = -\dfrac{R_0^2}{d_1}\left\{1 + p\left[\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{d_1}{R_0}\left(2 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}\right)\right]\right\}, \\[2mm] y = R_0\left[1 - p\left(1 + \dfrac{R_0}{d_1}\right)\left(2 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}\right)\right]. \end{cases}$$

Si l'on détermine l'aberration du second ordre, en portant la valeur de x dans (119) en prenant les termes du second ordre, on obtient

$$(123) \quad S = \frac{d_1^2 + R_0^2}{2R_0 d_1} \times \left[1 - p\,\frac{\left\{\dfrac{\pi^2}{32}\dfrac{d_1^2}{R_0} - \dfrac{\pi^2}{6}\dfrac{R_0^2}{d_1} + \dfrac{\pi}{4}R_0 - \dfrac{d_1}{3}\left(1 - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi^2}{16}\right)\right\}}{\dfrac{d_1^2 + R_0^2}{2R_0 d_1}}\right]\theta_0^2.$$

Dans le cas particulier dit symétrique où $d_1 = R_0$, (122) et (123) deviennent

$$(124) \quad \begin{cases} x = R_0\left[1 + p\left(\dfrac{\pi^2}{6} - 2 + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi^2}{16}\right)\right] \\ \quad \simeq R_0[1 + 1{,}45p], \\[2mm] y = R_0\left[1 - 2p\left(2 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{16}\right)\right] \\ \quad \simeq R_0[1 + 0{,}39p], \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (125) \quad S & = R_0\left[1 - p\left(\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi^2}{48}\right)\right]\theta_0^2 \\ & \simeq R_0[1 - 0{,}07p]\theta_0^2. \end{aligned}$$

Exemple numérique. — Prenons $p = \frac{2}{200}$, ce qui correspond à une variation du champ de l'ordre de 1 % du centre des pièces polaires aux faces terminales, et $R_0 = 200$ mm, on a alors pour la position de l'image (cas dit symétrique).

$$x = 200 + 5{,}8 \text{ mm}, \qquad y = 200 + 1{,}56 \text{ mm}.$$

Quant à l'aberration elle n'est pratiquement pas changée.

On peut donc conclure que la non-uniformité le long de la trajectoire moyenne a pour conséquence un léger déplacement de l'image, déplacement qui dans le cas dit symétrique détruit cette symétrie, l'aberration du second ordre n'étant pratiquement pas touchée.

4. CONCLUSIONS.

On a trouvé, en adoptant une allure de débordement de champ représentant suffisamment bien la réalité physique, que l'effet principal de ce débor-

dement est de modifier la position de l'image de la fente d'entrée par rapport à la face de sortie des pièces polaires. Cette modification qui entraîne un défaut de symétrie de l'appareil peut être compensée par un recul convenable de tout l'aimant, de telle sorte que l'appareil redevient symétrique mais avec des distances des fentes aux faces polaires accrues d'une quantité égale à la dimension de l'entrefer. Dans le cas où ce recul est effectué, la distance des deux fentes matérielles n'est pas changée et l'imagerie redevient à peu près ce qu'elle était en l'absence de débordement de champ.

Pour étudier l'influence des défauts d'uniformité du champ magnétique dans l'entrefer on a divisé le problème en variation du champ, supposé de révolution, le long d'un rayon vecteur et en variation le long d'une trajectoire moyenne d'un ion.

Dans le premier cas, le champ magnétique doit croître avec le rayon si l'on veut, avec un tube analyseur donné, c'est-à-dire dont les fentes sont à distance constante, continuer à assurer la coïncidence de l'image de la fente d'entrée avec la fente matérielle de sortie; mais alors la symétrie ne peut plus être assurée et l'aberration du second ordre est plus importante qu'avec un champ uniforme. Si l'on veut que cette aberration du second ordre ne soit pas accrue de plus de 10 % de sa valeur, il faut que le champ ne varie pas plus de 1/1000e pour une variation relative du rayon vecteur de 5 %, ce qui entraîne un choix convenable des cotes des pièces polaires.

Par ailleurs, si l'on consent à modifier les positions respectives des fentes matérielles, il est possible en faisant décroître le champ le long du rayon vecteur d'annuler complètement l'aberration du second ordre.

Dans le deuxième cas, qu'on sait exister inévitablement, l'image ne se trouve que légèrement déplacée sans que l'aberration du second ordre soit sensiblement touchée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Sur la théorie du spectromètre de masse à déviation de 90°*. Première partie : *Champ magnétique idéal* (*Annales de Radioélectricité*, t. 11, n° 45, juillet 1956, p. 249-267).

[2] R. Vauthier, *Application de l'optique des charges électriques à la spectrométrie de masse* (*Thèse*, Paris, 1954, p. 66).

[3] N. D. Coggeshall, *Fringing Flux Corrections for Magnetic Focusing Devices* (*J. Appl. Phys.*, t. 18, n° 10, 1947, p. 855-861).

[4] F. Durand, *Électrostatique et magnétostatique*, Masson, 1953, p. 322.

[5] Nils Svartholm et Kai Siegbahn, *An inhomogeneous ring-shaped magnetic field for two-directional focusing of electrons and its application to spectroscopie* (*Ark. für Matematik, astronomi och Fysik*, t. 33 A, n° 21, 1946, p. 1-28).

[6] Nils Svartholm, *The resolving power of a ring-shaped inhomogeneous magnetic field for two directional focusing of charged particules* (*Ark. für Matematik, astronomi och Fysik*, t. 33 A, n° 24, 1946, p. 1-10).

[7] F. B. Shull et D. M. Dennison, *The double focusing β ray spectrometer* (*Phys. Rev.*, t. 71, n° 10, 1947, p. 681-687).

NOTE SUR UN MOYEN APPROCHÉ PERMETTANT DE PRÉVOIR LES DÉFORMATIONS DES HYPERBOLES ÉQUIPHASES AU FRANCHISSEMENT DES LIGNES DE COTE (¹)

PAR P. HUGON,

Professeur général d'Hydrographie (C. R.),
Département « Decca » de la Société Française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *Les réseaux hyperboliques des systèmes de radionavigation à différence de phase du type Decca sont sujets à certaines déformations lorsque le signal franchit une ligne de côte et qu'ainsi la vitesse de propagation de ce signal subit une brusque discontinuité en passant de la terre sur la mer.*
Il en résulte qu'aux abords de terre, des corrections doivent être appliquées aux hyperboles théoriques des cartes de navigation radioélectriques.
L'auteur se propose dans la Note ci-dessous de définir un moyen approché de prévoir l'ordre de grandeur de ces corrections en fonction des différents parcours des ondes qui parviennent au récepteur.
Une application des formules obtenues pour calculer ces corrections a été faite aux déviations observées sur la chaîne expérimentale Decca nº 4 du Sud de la France. On notera que cette chaîne provisoire a cessé actuellement ses émissions depuis le 1er juin 1956, après environ six mois de fonctionnement. (C. D. U. : 621.396.962.21.)

SUMMARY. — *Hyperbolic radionavigation systems of the Decca type utilising phase differences are subject to certain distortions when the signal wave crosses a coast-line where it suffers a sudden discontinuity in its velocity of propagation on passing from land to sea.*
The result is that, near the coast-line, corrections have to be applied to the theoretical hyperbolae of the radionavigational charts.
In the following Note, the author proposes to define an approximative method of predicting the magnitude of these corrections, in terms of the various paths of the waves on their way to the receiver.
The formulae obtained for the calculation of these corrections have been applied to the Decca No. 4 experimental chain in Southern France. It should be noted that this provisional chain has ceased to transmit since June 1st 1956, after some 6 months of operation.
(U. D. C. : 621.396.962.21.)

Les considérations qui suivent procèdent d'une approximation purement théorique basée sur la géométrie élémentaire considérée comme plane pour de courtes distances. Elles sont inspirées des conclusions du document « A. S. R. E. Technical Note TX-52-7 : *Corrections contours of the Decca Navigator Lattice for the South Western Chain in the Bristol Channel Aera* » avec cette simplification importante qu'au lieu de considérer le parcours des ondes au contact d'un sol de conductibilité connue, avec une vitesse de base égale à celle de la lumière et d'appliquer à ce parcours les corrections de « phase lag » déduites des courbes de Norton, on suppose qu'on a directement utilisé une vitesse V' sur la terre voisine de la réalité, V étant la vitesse sur la mer, servant de référence.

(¹) Manuscrit reçu le 7 septembre 1956.

En un mot, il s'agit uniquement de dégrossir les corrections du contour de côte par le seul emploi de la loi dite « inverse distance ».

Il peut sembler à première vue que l'erreur introduite par V' est du même ordre de grandeur que celle qui consiste à négliger la variation de vitesse de V à V' au franchissement de la côte. En réalité, les déviations considérables qui apparaissent expérimentalement à toucher terre ont leur origine, moins dans l'inexactitude de la vitesse unique adoptée pour le tracé de courbes qui sont alors des hyperboles continues, que dans le fait même de la dualité de parcours et dans celui du passage d'une vitesse à l'autre.

C'est donc en tenant compte uniquement de ce phénomène qu'on obtiendra dans la zone qui touche immédiatement à cette variation de vitesse, les déformations des lignes équiphases. Ce résultat constituerait une première étape intéressante pour le cartographe et l'utilisateur et serait de toutes façons, plus voisine de la réalité que le tracé des hyperboles continues jusqu'à la côte.

1. Cas de la médiatrice géométrique.

Considérons le plan. Si l'on admet que le récepteur N est équidistant des deux stations M et E synchronisées en phase, et que les deux trajets

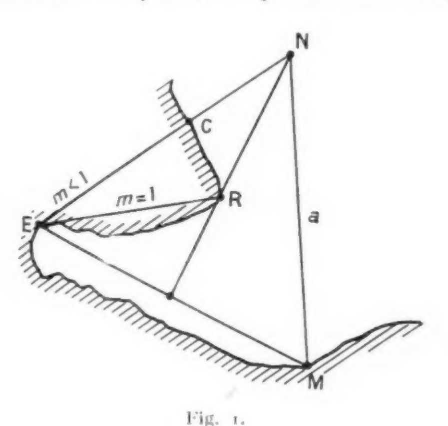


Fig. 1.

vers M et E sont intégralement tous deux sur la mer, parcourus à la vitesse V, le lieu de N pour une différence de phase nulle est la médiatrice rectiligne ou sphérique de la ligne de base ME (*fig.* 1).

Soit maintenant un récepteur N situé à une distance a de l'émetteur M et de l'émetteur E, mais alors que NM est tout entier sur la mer et parcouru à la vitesse V, le trajet NE égal à a est mixte, une fraction EC $= ma$ $(m < 1)$ est parcourue sur la terre à la vitesse V', l'autre fraction CN $= (1 - m)\,a$ est parcourue sur la mer à la vitesse V.

Nous examinons ainsi les cas où m est voisin de 1 lorsque le trajet atteint la côte et où m est très petit lorsque le trajet NE aboutit très au large.

La différence de phase théorique, exprimée en nombre de chenaux, au point N peut s'écrire

$$(1) \qquad L = f_c\, g \,.\, 10^3 \left(\frac{\mathrm{NM}}{V} - \frac{\mathrm{EC}}{V'} - \frac{\mathrm{CN}}{V} \right) + S,$$

f_c est la fréquence de comparaison;
g un facteur de conversion;
S une lecture étalon à la synchronisation.

Pour m quelconque, on a

$$L_1 = \frac{f_c}{V}\, g \,.\, 10^3 \left[a - ma\frac{V}{V'} - (1 - m)\,a \right] + S_1.$$

Pour $m = 0$, cette lecture théorique pour deux parcours égaux sur la mer, est nulle : $L_0 = 0$.

Pour le récepteur R situé en bordure de côte, $m = 1$, le parcours RE égal à a serait tout entier sur la terre et RM tout entier sur la mer, la lecture est L_2 :

$$L_2 = f_c\, g \,.\, 10^3 \left(\frac{\mathrm{RM}}{V} - \frac{\mathrm{RE}}{V'} \right) + S_2$$
$$= \frac{f_c}{V}\, g \,.\, 10^3\, a \left(1 - \frac{V}{V'} \right) + S_2$$

comparant L_2 à L_1 et supposant que m est très petit, on peut considérer que S_1 et S_2 sont très voisins et que les deux stations émettent en phase :

$$\frac{L_1}{L_2} = m \qquad \text{ou} \qquad L_1 = m\,L_2.$$

Même si les deux parcours EC et ER sont égaux en valeur absolue.

On voit que dans le cas du parcours mixte de N, la lecture est m fois celle du récepteur côtier R; m étant inférieur à l'unité : $L_1 < L_2$.

1° Le rapport $\frac{L_1}{L_2}$ est indépendant de la distance a;

2° A mesure que N s'éloigne au large, à équidistance de M et E, la lecture qui n'est pas nulle, diminue rapidement avec le rapport $m = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EN}}$.

Il en résulte bien ce qui est constaté expérimentalement, à savoir qu'au contact de la terre, le déphasage sur la ligne médiatrice n'est pas nul, qu'il est maximum pour $m = 1$ pour tendre vers zéro lorsque le trajet sur la mer devient prépondérant et que m

tend vers zéro. Il est donc confirmé que les déformations de la ligne équiphase nulle sont prépondérantes le long de la côte. Il est possible de prouver de même que cette loi s'applique aussi aux autres lignes équiphases, mais cette propriété apparaît par simple continuité.

2. Interprétation géométrique. Forme de la ligne équiphase nulle.

Si l'on considère le plan, le lieu des points tels que la différence de leurs distances à deux points fixes M et E est nulle est la perpendiculaire au milieu de ME; c'est aussi le lieu des points où la

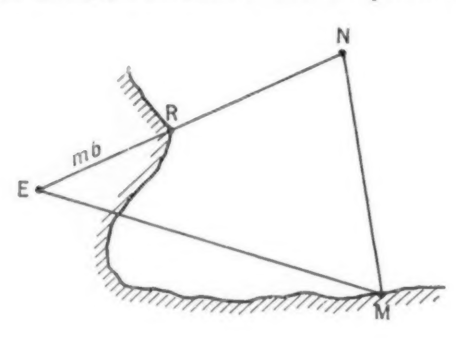


Fig. 2.

différence de phase est nulle si les deux parcours sont effectués à une même vitesse V. La lecture idéale est

$$L_0 = 0 = f_c\, g \,.\, 10^3 \left(\frac{a}{V} - \frac{a}{V}\right) = 0.$$

1° Dans le cas du récepteur R où un parcours a est effectué sur la mer avec la vitesse V et un parcours b effectué tout entier sur la terre avec la vitesse V' (*fig.* 2) :

$$L_r = f_c\, g \,.\, 10^3 \left(\frac{a}{V} - \frac{b}{V'}\right).$$

Le lieu équiphase sera défini par

$$aV' = bV \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} = \frac{V}{V'} = 1 + \frac{\Delta V}{V'}$$

en posant

$$\Delta V = V - V'.$$

Le lieu des points qui satisfont à cette condition et tel que le rapport de leurs distances à deux points fixes M et E est constant et égal à $\frac{V}{V'}$ est une demi-circonférence admettant comme diamètre, la distance entre les conjugués harmoniques α et β de M et E. Comme $\frac{V}{V'}$ est voisin de 1, ce diamètre est très grand, le point L est voisin du milieu de ME et le point β est presque à l'infini sur la direction ME.

2° Dans le cas du récepteur N où une fraction de la distance NE $= b$ est parcourue à la vitesse V', soit mb, et le reste $(1 - m)b$ à la vitesse V, la condition s'écrit

$$\frac{a}{V} - \frac{mb}{V'} - \frac{(1-m)b}{V} = 0.$$

La vitesse x équivalente qui donnerait le même déphasage sur tout le parcours b est

$$\frac{b}{x} = \frac{mb}{V'} + \frac{(1-m)b}{V},$$

où

$$\frac{1}{x} = \frac{m(V - V') + V'}{VV'} = \frac{m\Delta V + V'}{VV'}.$$

La condition est donc

$$\frac{a}{V} = \frac{b}{x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} = \frac{m\Delta V}{V'} + 1.$$

Ici encore, la ligne équiphase nulle, pour le point N' est une demi-circonférence admettant comme diamètre la distance $\alpha\beta$, α et β étant les conjuguées de M et E dans le rapport $\frac{m\Delta V}{V'} + 1$. Ce rapport tend vers 1 lorsque le point N' s'éloignant, la fraction m tend vers zéro et la circonférence tend asymptotiquement vers la médiatrice rectiligne.

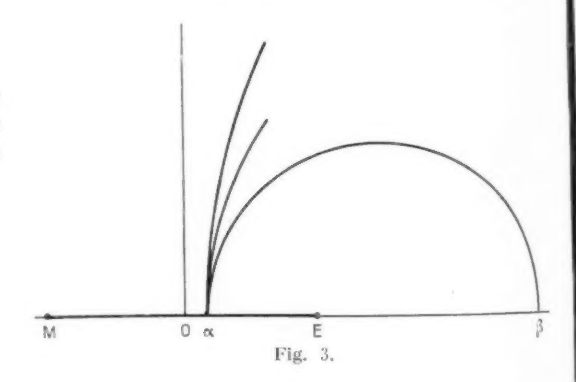


Fig. 3.

Ainsi, au fur et à mesure que m tend de 1 vers zéro les lieux successifs sont des arcs de cercle dont le rayon tend vers l'infini (*fig.* 3).

Si l'on pose

$$\frac{m\Delta V}{V'} + 1 = 1 + \varepsilon.$$

On peut calculer la distance OL, O étant le milieu

de ME où le cercle coupe la ligne de base. On a au point L :

$$\frac{\alpha E}{\alpha M} = 1 + \varepsilon = \frac{\beta E}{\beta M}.$$

Si l'on pose $OM = \frac{d}{2}$ on a

$$O\alpha = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}\frac{d}{2} = \frac{d}{2}\frac{\frac{m\Delta V}{V'}}{2 + \frac{m\Delta V}{V'}}.$$

On a de même le diamètre $D = \alpha\beta$,

$$OE^2 = O\alpha . O\beta,$$

$$D = \frac{2d(1 + \varepsilon)}{\varepsilon(2 + \varepsilon)}.$$

Le diamètre tend vers l'infini lorsque m tend vers zéro.

3. Généralisation.

Dans le cas le plus général où les deux trajets NE et NM ont des parcours EC = mb et MD = na à la vitesse V' sur la terre, la ligne équiphase nulle est définie par

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} = \frac{x}{y},$$

or les vitesses équivalentes x et y sont définies par

$$\frac{1}{x} = \frac{m}{V'} + \frac{1 - m}{V} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{y} = \frac{n}{V'} + \frac{1 - n}{V}.$$

On a donc

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{m\Delta V}{V'} + 1}{\frac{n\Delta V}{V'} + 1}.$$

Le lieu équiphase de valeur nulle est donc défini de la même façon par une demi-circonférence construite sur les deux conjugués harmoniques α et β de M et E, tels que

$$\frac{\alpha E}{\alpha M} = \frac{\beta E}{\beta M} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'}$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{m\Delta V}{V'}, \qquad \varepsilon' = \frac{n\Delta V}{V'}.$$

On peut calculer comme précédemment la distance $O\alpha$:

$$\frac{\alpha E}{\alpha M} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha E - \alpha M}{\alpha E + \alpha M} = \frac{2 O\alpha}{d} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2 + \varepsilon + \varepsilon'},$$

$$O\alpha = \frac{d}{2}\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2 + \varepsilon + \varepsilon'} = \frac{d}{2}\frac{\frac{\Delta V}{V'}(m - n)}{2 + \frac{\Delta V}{V'}(m + n)}.$$

Il est visible que $O\alpha$ tend vers zéro lorsque m tend vers n, c'est-à-dire lorsque les fractions de parcours à la vitesse V' deviennent les mêmes sur les deux trajets.

Le diamètre D de la circonférence lieu, se calcule comme précédemment :

$$D = \frac{d}{2}\frac{1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{2 + \varepsilon + \varepsilon'}}{\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2 + \varepsilon + \varepsilon'}}.$$

D tend vers l'infini lorsque m et n tendent séparément vers zéro à grande distance et lorsque m et n tendent l'un vers l'autre à distance quelconque.

4. Calcul des corrections en un point quelconque.

Si les deux trajets a et b, à partir d'un récepteur R étaient tous deux sur mer à la vitesse V, la lecture en nombre de chenaux serait

$$N_0 = \frac{f_c g . 10^3}{V}(a - b) + S.$$

Si les deux trajets a et b sont parcourus à deux vitesses, mer et terre V et V' pour deux fractions ma

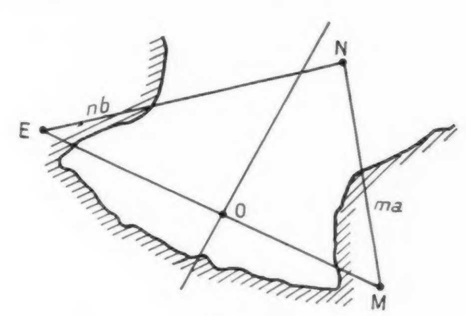


Fig. 4.

et $a(1 - m)$ d'une part et nb et $b(1 - n)$ d'autre part, la lecture serait (*fig.* 4)

$$N_1 = f_c g . 10^3 \left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right) + S$$

ou comme précédemment :

$$N_1 = f_c g . 10^3 \left[a\left(\frac{m}{V'} + \frac{1 - m}{V}\right) - b\left(\frac{n}{V'} + \frac{1 - n}{V}\right) + S\right].$$

La correction est donc

$$N_1 - N_0 = f_c g . 10^3 \left(\frac{am - bn}{VV'}\right)(V - V')$$

$$= f_c g . 10_3 \left(\frac{am - bn}{VV'}\right)\Delta V,$$

le rapport $\frac{\Delta V}{VV'}$ voisin de $\frac{\Delta V}{V^2}$ est calculé une fois pour toutes.

Si $m = 1$, récepteur en bordure de côte :

$$N_1 - N_0 = f_0\, g \,.\, 10^3 (a - bn) \frac{\Delta V}{VV'},$$

la correction est très forte.

Le long d'une hyperbole dont le numéro de chenal correspond à $a - b$, on voit que l'erreur relative est caractérisée par le facteur $\frac{ma - nb}{a - b}$ et dans le cas simple où $m = n$, même rapport de parcours

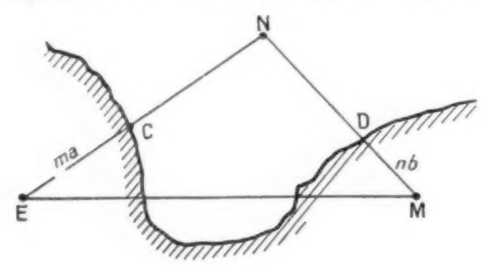


Fig. 5.

sur les deux trajets en contact avec la terre, l'erreur relative est proportionnelle à m, ce qui vérifie le

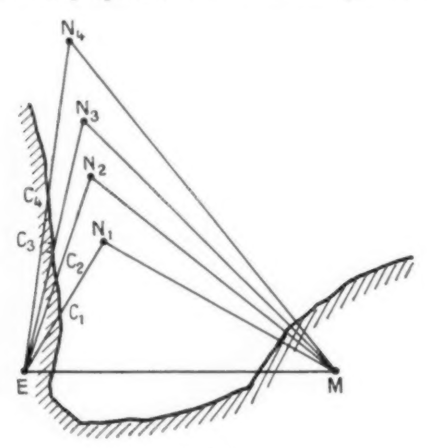


Fig. 6.

résultat trouvé dans le cas particulier de la médiatrice, c'est-à-dire qu'au large, l'erreur relative tend vers zéro avec m.

Au contraire, au voisinage de la terre, le long d'une même hyperbole, les fractions de trajet sur la terre peuvent avoir des longueurs très variables suivant la position considérée, d'où une grande discontinuité de corrections.

Lorsqu'un des trajets, par exemple a, prend une direction normale à la côte, celle-ci étant supposée grossièrement rectiligne ou circulaire, le terme ma reste à peu près constant et si l'on considère d'autre part que le terme nb est sensiblement fixe, la correction à appliquer le long de la côte reste stable, et peu variable (*fig.* 5). Au contraire, lorsque le trajet a tangente la côte, le terme ma varie très rapidement, la correction à appliquer au diagramme hyperbolique subit aussi de rapides variations pour des lieux très voisins (*fig.* 6).

5. Application pratique.

Le calcul des corrections peut être fait *a priori* de façon approximative en définissant en premier lieu, une vitesse moyenne de propagation sur la terre, après avoir mesuré les parcours sur différents tronçons de conductibilité différentes; la vitesse moyenne sur la mer sera naturellement plus facile à définir en admettant par exemple la conductibilité 5.10^{-11}.

En second lieu, il sera nécessaire pour chaque position considérée de mesurer de façon aussi précise que possible le total des parcours sur la terre et le total des parcours sur la mer pour chaque chemin de propagation, compte tenu, si possible, des allongements de parcours sur la terre produits par le relief. Il faudra enfin définir la constante S apparaissant par suite de la synchronisation des stations sur le trajet Maître-Esclave.

On ne devra pas se dissimuler que les résultats ainsi obtenus seront très grossièrement approchés car ils ne tiennent pas compte de l'effet de déphasage dû au relief et à l'effet du champ de radiation, mais la connaissance même très grossière des corrections à appliquer aux hyperboles théoriques dans la bande côtière sera de toutes façons préférable à celle que donne le diagramme théorique purement hyperbolique.

A titre d'exemple de principe et pour fixer un ordre de grandeur, on a évalué ci-dessous les corrections à appliquer en certains points de la couverture de la chaîne sud de la France en les comparant avec les résultats obtenus par observation expérimentale. Les distances utilisées ont été très grossièrement mesurées sur la carte à quelques kilomètres près et deux vitesses de propagation V et V' ont été envisagées sur la mer et sur la terre :

$V' = 299\,290$ km/s sur la terre.

$V = 299\,650$ km/s sur la mer.

5.1. Exemple d'une station au large. — Si l'on considère une station centrale des six stations observées en vue de la côte de Corse, à l'ouest du phare des Sanguinaires, soit la station 4 C dont les coordonnées sont : 41° 48′ 58″ N et 08° 33′ 03″ E, on a sur la carte :

Trajet Maître : 419 km sur la terre : *ma* = 35 km approximativement;

Trajet Esclave rouge : 320 km sur la terre : *nb* = 105 km.

Par ailleurs : $\Delta V = 360$ km/s.

Correction calculée :

$$V_1 - V_0 = f_r\, g \cdot 10^3 (am - bn) \frac{\Delta f}{f^2}.$$

On trouve sur le réseau rouge :

$$V_1 - V_0 = \frac{360}{9.10^{10}} \times 340\,000 \times [+35 - (-105)]$$

$$= +0,19 \text{ chenal rouge.}$$

Or, les résultats observés sur les six stations ont abouti aux corrections suivantes sur le réseau rouge : + 20, + 25, + 15, + 20, + 22 et + 25.

5.2. Cas d'une station côtière. — L'exemple précédent est d'autant plus justifié que les corrections du large sont à grande distance très largement stabilisées. Au contraire, près de terre, sur le littoral de la chaîne, l'amplitude de la correction est très variable avec le chemin parcouru sur la mer.

Pour la position n° 1 en rade de Toulon de coordonnées 43° 04′ 43″ N et 05° 59′ 27″ E, on a mesuré les parcours suivants sur le réseau rouge :

Trajet Maître total : 172 km; sur la mer : 22 km; *ma* = 150 km;

Trajet Esclave rouge total : 95 km; sur la mer : 10 km; *mb* = 85 km.

Correction calculée :

$$V_1 - V_0 = f_r\, g \cdot 10^3 (ma - nb) \frac{\Delta f}{f^2}$$

$$= 340.10^3 [+150 - (-85)] \times \frac{360}{9.10^{10}}$$

$$= +0,32 \text{ chenal rouge.}$$

On a trouvé dans la rade, aux environs de ce point : + 0,30, + 0,25, + 0,25.

c. Aux environs du cap Couronne, à la station n° 10 dont les coordonnées sont : 43° 13′ 50″ N, 05°04′20″E, on a mesuré :

Trajet Maître total : 98 km; parcours mer : 28 km;

Trajet Esclave rouge : 93 km; parcours mer : 16 km.

$$V_1 - V_0 = 340.10^3 [+70 - (-77)] \frac{\Delta f}{f^2}$$

$$= +0,19 \text{ chenal rouge.}$$

On a trouvé par observation + 0,10, mais il y a lieu de souligner que le chenal rouge est très étroit : 600 m et que la précision de l'observation de contrôle au cercle n'a pas été supérieure aux 5/100e de chenal.

Le caractère très approximatif du calcul de ces comparaisons doit être considéré pour en tirer les conclusions nécessaires; on doit y ajouter, en outre, que les vitesses de propagation utilisées ont été choisies de façon arbitraire et que par ailleurs il n'a pas été tenu compte de la constante de synchronisation sur la ligne de base. Il n'en ressort pas moins que ces prévisions simples se rapprochent de l'ordre de grandeur des corrections observées.

ARTICLES PUBLIÉS, AU COURS DE L'ANNÉE 1956, PAR LES COLLABORATEURS DU GROUPE EN DEHORS DES ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ

Le zirconium, matériau nucléaire, par N'Guyen Thien-Chi (*Le Vide*, n° 60, novembre-décembre 1955, p. 152-164).

L'exposé est consacré à une méthode spéciale d'élaboration du zirconium ductile de haute pureté, la méthode de Van Arkel, qu'il a été donné à l'auteur d'étudier dans ses laboratoires.

L'invention de la diode. A propos du cinquantenaire du brevet Flemming, par L. Bouthillon (*Onde Électrique*, décembre 1955, p. 1125-1146).

L'auteur en se référant systématiquement aux travaux originaux et en donnant de nombreuses citations, expose la suite des travaux qui, de Priestley (1767) à Flemming (1904) ont abouti à la diode à vide de la technique électronique. Le rôle de chacun se trouve ainsi objectivement apprécié. L'étude met tout particulièrement en lumière, parmi beaucoup d'autres, les noms d'Elster et Geitel pour la recherche expérimentale qui a démêlé les conditions de la production de l'électricité négative par les corps incandescents, de J. J. Thomson pour l'interprétation physique du phénomène de base, de Hittorf pour le principe du fonctionnement en valve, base des applications.

Calcul et construction de réflecteurs à double courbure, par L. Thourel (*Onde Électrique*, décembre 1955, p. 1153-1163).

Après avoir repris la théorie de la détermination de la surface par les méthodes de l'optique géométrique, l'auteur expose une méthode pratique de calcul et étudie le choix de la position de la source d'illumination et les possibilités d'exécution de la surface. Les formules de diffraction permettant de calculer le rayonnement de l'antenne sont ensuite établies. L'auteur indique comment les résultats de ce calcul peuvent être utilisés pour corriger éventuellement la forme de la surface déduite des méthodes de l'optique géométrique. Des résultats expérimentaux sont indiqués, qui démontrent la validité des méthodes proposées.

Évolution du radar dans l'aéronautique, par R. Aubert (*Interavia*, janvier 1956, p. 56-57).

L'auteur étudie le développement du radar en fonction de celui des avions. Il examine successivement les différents domaines d'application : défense aérienne du territoire, radar aéroporté, engins téléguidés, radar de D. C. A., et enfin applications civiles.

Électronique et atomistique, par M. Ponte (*Revue de la Défense Nationale*, janvier 1956, p. 55-69).

Le rôle de l'électronique en atomistique est dominant, l'électronique assure les fondations mêmes de la science nucléaire. L'auteur dégage trois aspects de cette alliance : l'électronique a créé et préparé les modes de pensée et d'expérimentation ; l'électronique a apporté et apporte sans cesse des appareils et procédés nouveaux, proprement nucléaires ; l'électronique a apporté sa richesse en appareils et moyens de contrôle et d'essais.

Problèmes physiques posés par les transmissions sur faisceaux hertziens, par J. Fagot (*Onde Électrique*, janvier 1956, p. 7-22).

L'auteur passe en revue dans cet article les problèmes de caractère général rencontrés dans les transmissions par faisceaux hertziens. On constate en effet qu'il existe un certain nombre de questions de base qui se posent quelles que soient les techniques de détail utilisées. Ces questions qui trouvent essen-

tiellement leur origine dans les phénomènes physiques sont les suivantes : 1° Transfert de la puissance $\left(\text{évolution du rapport } \frac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right)$; 2° Modification de la fréquence moyenne; 3° Variation de la vitesse de propagation le long du faisceau. Il est donné une idée de l'action de cette variation sur la distorsion harmonique en modulation de fréquence.

Sur une forme particulière des équations régissant la propagation des porteurs libres dans un réseau cristallin homogène du type « à jonction » unidimensionnel, par A. Leblond (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, janvier 1956, p. 85-87).

L'auteur montre qu'en prenant comme inconnues la somme $p + n$ et la différence $p - n$ des porteurs positifs et négatifs ainsi que le champ électrique, on peut résoudre par itération les équations du mouvement des porteurs libres dans un schéma unidimensionnel de jonction à n zones.

Note sur une structure particulière permettant d'obtenir des oscillations de haute fréquence, par A. Leblond (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, janvier 1956, p. 621-623).

L'auteur a réalisé une jonction semi-conductrice du type $p - i$ présentant aux basses températures une caractéristique avec une région à résistance négative. Cette particularité permet l'entretien stable et reproductible d'oscillations H. F. pouvant monter jusqu'à 35 Mc/s.

Le Stabilidyne, par M. Colas (*Onde Électrique*, février 1956, p. 83-93).

Après avoir rappelé la nécessité de la stabilisation des fréquences de trafic et l'évolution des procédés de stabilisation, l'auteur décrit un nouveau système, en donne la précision, la stabilité et les limites pratiques à la réception et à l'émission. Puis l'auteur décrit quelques réalisations industrielles et en donne les principales caractéristiques.

Sur les progrès de la synthèse entre mécanique et électronique et quelques-unes de leurs conséquences, par M. Ponte (*Ingénieurs et Techniciens*, mars 1956, p. 3-13; *Onde Électrique*, juillet 1956, p. 568-574 et *Bull. Soc. Franç. Mec.*, 2e trimestre 1956, p. 6-11).

Texte de la conférence d'ouverture prononcée par M. Ponte le 5 novembre 1955, à la journée d'études commune à la Société Française des Mécaniciens, à la Société des Radioélectriciens et à l'Association des Ingénieurs Électroniciens.

L'auteur distingue trois phases dans l'évolution des théories physiques : phase de la mécanique pure; phase de l'électricité, et phase électronique qui ne peut être dissociée de la phase atomistique. Les moyens mis par l'électronique à la disposition des mécaniciens et des électriciens sont examinés, en particulier l'auteur remarque que l'électronique a contribué à élargir les concepts et à modifier des formes de pensée, par exemple, par l'étude des phénomènes non linéaires. La réalisation future de sous-ensembles fonctionnels électroniques, assimilables aux éléments mécaniques normalisés et son incidence sur la fusion des deux techniques sont examinées. L'auteur aborde enfin le problème de la formation des ingénieurs, condition impérative de toute réalisation future dans les domaines électroniques ou mécaniques.

The O-type carcinotron tube, par P. Palluel et A. Goldberger (*Proc. Inst. Radio Engrs*, mars 1956, p. 343-345).

Analyse du fonctionnement des carcinotrons type O, oscillateurs à ondes inverses. Ces tubes sont particulièrement indiqués pour les cas où l'on a besoin d'un accord électronique dans une large bande avec une puissance de sortie faible. Étude des conditions de fonctionnement des oscillateurs de ce genre avec résultats expérimentaux. Les auteurs établissent des expressions pour évaluer l'effet de réflexion, pour la détermination du rendement et pour le processus de l'accord électronique.

L'organisation de l'effort français en matière de spécifications de pièces détachées, par A. Danzin (*Onde Électrique*, mars 1956, p. 169-175).

L'article constitue le résumé d'une plaquette diffusée par la Fédération des Syndicats Nationaux des Industries Radioélectriques et Électroniques à l'occasion du récent Salon de la Pièce Détachée Radioélectrique. Après avoir signalé les raisons qui justifient l'effort entrepris, l'article décrit l'organisation des différents comités et groupes de travail dont l'objet est l'établissement d'un système de normalisations unifiées en matière de pièces détachées radioélectriques.

Calcul des circuits utilisant des transistors à jonctions aux fréquences élevées, par J. P. Vasseur (*Onde Électrique*, mars 1956, p. 230-251).

Cette étude a pour but de fournir un ensemble de formules permettant le calcul des circuits linéaires à transistors aux fréquences élevées. L'emploi d'un schéma équivalent naturel conduit à des expressions valables à toutes fréquences. L'auteur rappelle également les formules obtenues en utilisant les paramètres z et h, ces derniers ayant toutefois l'inconvénient d'être fonction de la fréquence. Il trouve d'abord qu'un transistor amplificateur peut osciller sur sa seule réaction interne dans une large gamme de fréquences. Quelques circuits de neutrodynage usuels évitant cette instabilité sont discutés. Un grand

ARTICLES PUBLIÉS, AU COURS DE L'ANNÉE 1956, PAR LES COLLABORATEURS DU GROUPE EN DEHORS DES ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ

Le zirconium, matériau nucléaire, par N'Guyen THIEN-CHI (*Le Vide*, n° 60, novembre-décembre 1955, p. 152-164).

L'exposé est consacré à une méthode spéciale d'élaboration du zirconium ductile de haute pureté, la méthode de Van Arkel, qu'il a été donné à l'auteur d'étudier dans ses laboratoires.

L'invention de la diode. A propos du cinquantenaire du brevet Flemming, par L. BOUTHILLON (*Onde Électrique*, décembre 1955, p. 1125-1146).

L'auteur en se référant systématiquement aux travaux originaux et en donnant de nombreuses citations, expose la suite des travaux qui, de Priestley (1767) à Flemming (1904) ont abouti à la diode à vide de la technique électronique. Le rôle de chacun se trouve ainsi objectivement apprécié. L'étude met tout particulièrement en lumière, parmi beaucoup d'autres, les noms d'Elster et Geitel pour la recherche expérimentale qui a démêlé les conditions de la production de l'électricité négative par les corps incandescents, de J. J. Thomson pour l'interprétation physique du phénomène de base, de Hittorf pour le principe du fonctionnement en valve, base des applications.

Calcul et construction de réflecteurs à double courbure, par L. THOUREL (*Onde Électrique*, décembre 1955, p. 1153-1163).

Après avoir repris la théorie de la détermination de la surface par les méthodes de l'optique géométrique, l'auteur expose une méthode pratique de calcul et étudie le choix de la position de la source d'illumination et les possibilités d'exécution de la surface. Les formules de diffraction permettant de calculer le rayonnement de l'antenne sont ensuite établies. L'auteur indique comment les résultats de ce calcul peuvent être utilisés pour corriger éventuellement la forme de la surface déduite des méthodes de l'optique géométrique. Des résultats expérimentaux sont indiqués, qui démontrent la validité des méthodes proposées.

Évolution du radar dans l'aéronautique, par R. AUBERT (*Interavia*, janvier 1956, p. 56-57).

L'auteur étudie le développement du radar en fonction de celui des avions. Il examine successivement les différents domaines d'application : défense aérienne du territoire, radar aéroporté, engins téléguidés, radar de D. C. A., et enfin applications civiles.

Électronique et atomistique, par M. PONTE (*Revue de la Défense Nationale*, janvier 1956, p. 55-69).

Le rôle de l'électronique en atomistique est dominant, l'électronique assure les fondations mêmes de la science nucléaire. L'auteur dégage trois aspects de cette alliance : l'électronique a créé et préparé les modes de pensée et d'expérimentation; l'électronique a apporté et apporte sans cesse des appareils et procédés nouveaux, proprement nucléaires; l'électronique a apporté sa richesse en appareils et moyens de contrôle et d'essais.

Problèmes physiques posés par les transmissions sur faisceaux hertziens, par J. FAGOT (*Onde Électrique*, janvier 1956, p. 7-22).

L'auteur passe en revue dans cet article les problèmes de caractère général rencontrés dans les transmissions par faisceaux hertziens. On constate en effet qu'il existe un certain nombre de questions de base qui se posent quelles que soient les techniques de détail utilisées. Ces questions qui trouvent essen-

tiellement leur origine dans les phénomènes physiques sont les suivantes : 1° Transfert de la puissance (évolution du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$); 2° Modification de la fréquence moyenne; 3° Variation de la vitesse de propagation le long du faisceau. Il est donné une idée de l'action de cette variation sur la distorsion harmonique en modulation de fréquence.

Sur une forme particulière des équations régissant la propagation des porteurs libres dans un réseau cristallin homogène du type « à jonction » unidimensionnel, par A. Leblond (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, janvier 1956, p. 85-87).

L'auteur montre qu'en prenant comme inconnues la somme $p + n$ et la différence $p - n$ des porteurs positifs et négatifs ainsi que le champ électrique, on peut résoudre par itération les équations du mouvement des porteurs libres dans un schéma unidimensionnel de jonction à n zones.

Note sur une structure particulière permettant d'obtenir des oscillations de haute fréquence, par A. Leblond (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, janvier 1956, p. 621-623).

L'auteur a réalisé une jonction semi-conductrice du type $p - i$ présentant aux basses températures une caractéristique avec une région à résistance négative. Cette particularité permet l'entretien stable et reproductible d'oscillations H. F. pouvant monter jusqu'à 35 Mc/s.

Le Stabilidyne, par M. Colas (*Onde Électrique*, février 1956, p. 83-93).

Après avoir rappelé la nécessité de la stabilisation des fréquences de trafic et l'évolution des procédés de stabilisation, l'auteur décrit un nouveau système, en donne la précision, la stabilité et les limites pratiques à la réception et à l'émission. Puis l'auteur décrit quelques réalisations industrielles et en donne les principales caractéristiques.

Sur les progrès de la synthèse entre mécanique et électronique et quelques-unes de leurs conséquences, par M. Ponte (*Ingénieurs et Techniciens*, mars 1956, p. 3-13; *Onde Électrique*, juillet 1956, p. 568-574 et *Bull. Soc. Franç. Méc.*, 2e trimestre 1956, p. 6-11).

Texte de la conférence d'ouverture prononcée par M. Ponte le 5 novembre 1955, à la journée d'études commune à la Société Française des Mécaniciens, à la Société des Radioélectriciens et à l'Association des Ingénieurs Électroniciens.

L'auteur distingue trois phases dans l'évolution des théories physiques : phase de la mécanique pure; phase de l'électricité, et phase électronique qui ne peut être dissociée de la phase atomistique. Les moyens mis par l'électronique à la disposition des mécaniciens et des électriciens sont examinés, en particulier l'auteur remarque que l'électronique a contribué à élargir les concepts et à modifier des formes de pensée, par exemple, par l'étude des phénomènes non linéaires. La réalisation future de sous-ensembles fonctionnels électroniques, assimilables aux éléments mécaniques normalisés et son incidence sur la fusion des deux techniques sont examinées. L'auteur aborde enfin le problème de la formation des ingénieurs, condition impérative de toute réalisation future dans les domaines électroniques ou mécaniques.

The O-type carcinotron tube, par P. Palluel et A. Goldberger (*Proc. Inst. Radio Engrs*, mars 1956, p. 343-345).

Analyse du fonctionnement des carcinotrons type O, oscillateurs à ondes inverses. Ces tubes sont particulièrement indiqués pour les cas où l'on a besoin d'un accord électronique dans une large bande avec une puissance de sortie faible. Étude des conditions de fonctionnement des oscillateurs de ce genre avec résultats expérimentaux. Les auteurs établissent des expressions pour évaluer l'effet de réflexion, pour la détermination du rendement et pour le processus de l'accord électronique.

L'organisation de l'effort français en matière de spécifications de pièces détachées, par A. Danzin (*Onde Électrique*, mars 1956, p. 169-175).

L'article constitue le résumé d'une plaquette diffusée par la Fédération des Syndicats Nationaux des Industries Radioélectriques et Électroniques à l'occasion du récent Salon de la Pièce Détachée Radioélectrique. Après avoir signalé les raisons qui justifient l'effort entrepris, l'article décrit l'organisation des différents comités et groupes de travail dont l'objet est l'établissement d'un système de normalisations unifiées en matière de pièces détachées radioélectriques.

Calcul des circuits utilisant des transistors à jonctions aux fréquences élevées, par J. P. Vasseur (*Onde Électrique*, mars 1956, p. 230-251).

Cette étude a pour but de fournir un ensemble de formules permettant le calcul des circuits linéaires à transistors aux fréquences élevées. L'emploi d'un schéma équivalent naturel conduit à des expressions valables à toutes fréquences. L'auteur rappelle également les formules obtenues en utilisant les paramètres z et h, ces derniers ayant toutefois l'inconvénient d'être fonction de la fréquence. Il trouve d'abord qu'un transistor amplificateur peut osciller sur sa seule réaction interne dans une large gamme de fréquences. Quelques circuits de neutrodynage usuels évitant cette instabilité sont discutés. Un grand

nombre de grandeurs fondamentales d'un montage suivent la même loi en fonction de la fréquence. C'est le cas notamment des impédances d'entrée ou de sortie pour la sortie ou l'entrée en court-circuit ou en circuit ouvert, ainsi que des gains en courant. Des courbes universelles et des tableaux de valeurs limites permettent de déterminer rapidement ces éléments à une fréquence quelconque. Enfin, l'auteur discute la valeur du gain en puissance maximum en fonction de la fréquence. La fonction explicite est indiquée pour le montage émetteur commun.

Techniques de fabrication et de contrôle des tubes électroniques de sécurité, par J. Brasier (*Bull. Soc. Franç. Électr.*, mars 1956, p. 205-214 et *Le Vide*, mars-avril 1956, p. 66-77).

La première partie de l'article est consacrée à l'historique de l'évolution des tubes de sécurité conçus à l'origine pour les besoins de l'aviation, mais dont le domaine d'application s'est largement étendu.

Dans une deuxième partie, l'auteur compare les cahiers des charges américains et français applicables à ces tubes.

Une troisième partie présente un certain nombre de procédés spécialement mis au point pour la fabrication de tubes répondant à ces cahiers des charges

Instabilité des faisceaux électroniques soumis à un champ magnétique, par M. Epsztein (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, mars 1956, p. 1425-1428).

Tentative d'explication théorique de l'instabilité d'un faisceau électronique tubulaire plongé dans un champ magnétique parallèle à l'axe. Moyennant quelques hypothèses assez naturelles, on peut appliquer la théorie des petites perturbations. La principale conclusion à tirer de ce travail est sans doute que l'énergie mise en jeu dans l'éclatement du faisceau provient uniquement de la répulsion mutuelle des électrons.

The amplitude concept of an electromagnetic wave and its application to junction problems in waveguides, par J. Ortusi (*Trans. Inst. Radio Engrs*, vol. AP-4, avril 1956, p. 156-162).

Démonstration de la possibilité d'étendre la conception de l'amplitude complexe au cas des ondes guidées. Application de cette extension aux jonctions des guides d'onde, dont le comportement peut ainsi être inclus dans l'évaluation générale et traité par le calcul.

Measuring capacitor temperature coefficient, par J. Peyssou et L. Ladefroux (*Tele-Tech. and Electronic Industries*, avril 1956, p. 70-71).

Après avoir posé le problème général des variations thermiques de capacité d'un condensateur, et souligné leur importance industrielle dans la stabilité des circuits, les auteurs définissent le coefficient de température et ses tolérances pratiques ainsi que le principe de sa mesure. Ils décrivent ensuite deux appareils de mesure classiques : l'appareil à double battement et l'appareil à autosynchronisation, et montrent la nécessité d'améliorer la précision et la cadence des mesures industrielles par l'emploi d'un appareil électronique nouveau : le calculateur analogique C. S. F. Les auteurs décrivent ensuite une machine automatique utilisant le calculateur comme capacimètre et discutent de la précision des mesures en grande série des coefficients de température. Ils terminent par deux exemples d'application, l'un dans la recherche de la stabilité de condensateurs céramiques, l'autre dans la construction d'une courbe de répartition des coefficients de température d'un lot de 4 000 condensateurs.

Récents développements dans le domaine des tubes « carcinotron O », par P. Palluel (*Onde Électrique*, avril 1956, p. 318-335).

Utilisant le couplage électronique entre un faisceau d'électrons et une onde inverse retardée, le « carcinotron O » est un tube auto-oscillateur à très large bande d'accord électronique et dont la fréquence d'oscillation est peu sensible à la charge extérieure. L'expérience confirme les évaluations théoriques relatives aux conditions d'accrochage, aux performances à l'état de régime, à la sensibilité à divers effets. Une série de six modèles couvre, par tranches d'une octave, le domaine 1000-15 000 Mc/s avec des recouvrements dans les bandes les plus courantes. L'emploi de lignes interdigitales courtes et massives assure des performances élevées et des qualités de robustesse et de reproductibilité.

Étude de la caractéristique intensité-tension d'une structure semi-conductrice p-i-p en tenant compte de l'ionisation du milieu due aux porteurs, par A. Leblond (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 2 avril 1956, p. 1856-1859).

L'auteur donne les bases d'une étude théorique des jonctions *p-i-p* en tenant compte de l'ionisation de la zone médiane où se développent principalement les champs dont les résultats permettent de prévoir les caractéristiques intensité-tension à résistance négative observée sur ces éléments.

Investigaciones electronicas, par A. Danzin (France Amérique Latine, mai 1956, p. 88-91).

L'auteur donne un aperçu de l'organisation de la Recherche Scientifique en France, qui se répartit entre les laboratoires des Universités, des Ministères Techniques et l'industrie privée. Il énumère ensuite

certaines revues techniques qui divulguent les résultats de ces recherches.

The various theories on the propagation of ultra-short waves beyond the horizon, par J. Ortusi (*Proc. Inst. Radio Engrs*, Australia, juin 1956, p. 223-228).

Depuis le développement rapide de la télévision et de la détection électromagnétique, l'utilisation des ondes ultracourtes dont la longueur d'onde est inférieure à quelques mètres a augmenté de façon considérable. La caractéristique essentielle de ces ondes est l'absence presque complète de réflexion sur les couches ionosphériques responsables de la propagation lointaine des ondes courtes. L'auteur étudie successivement trois théories permettant le calcul des champs derrière l'horizon : théorie de la turbulence, théorie des réflexions multiples, théorie de la diffraction pure. Ces trois théories reposent sur l'instabilité de l'onde propagée au loin vis-à-vis de différents facteurs physiques (météorologiques ou dictés par les conditions du terrain). L'auteur envisage leurs avantages et inconvénients respectifs.

Radars aéroportés, par P. Ponty (*L'Air*, juin 1956, p. 40-43).

L'auteur énumère les diverses applications du radar aéroporté : détections des orages, des obstacles, etc, et étudie les principaux problèmes posés par la construction d'un radar de bord : poids, encombrement, alimentation électrique du radar, accessibilité et maintenance.

Conditions of analogy between the propagation of electromagnetic waves and the trajectories of particles of same spin with applications to rectifying magnetrons, par J. Ortusi (*Trans. Inst. Radio Engrs*, vol. AP-4, juillet 1956, p. 359-367).

L'auteur étudie dans cet article le rapport biunivoque établi par le principe de Pauli entre l'énergie interne d'une particule et la fréquence de l'onde associée dans un milieu qui donne naissance à un couplage fort entre les particules lorsque leurs spins sont orientés favorablement.

Dans la première partie, l'auteur examine la forme générale des fonctions d'onde dans de tels milieux et établit qu'ils contiennent des particules complémentaires aux particules libres.

Dans la deuxième partie, il examine les conditions mathématiques permettant d'établir les analogies entre les fonctions de Schrödinger et la propagation troposphérique.

Dans la troisième partie, ces conditions sont utilisées pour prédire l'existence de couches d'arrêt électroniques et pour étudier leurs propriétés dans les magnétrons redresseurs. L'article se termine par un exposé de l'utilisation de ces principes pour la détection dans les radars.

Application of periodic functions approximation to antenna pattern synthesis and circuit theory, par J. C. Simon (*Trans. Inst. Radio Engrs*, vol. AP-4, juillet 1956, p. 429-440).

Par une transformation linéaire de la somme d'une série de Fourier, on obtient une somme ayant une erreur moindre que celle se rattachant à la somme de la série de Fourier. Il est possible de poser certaines limites générales dans le cas de rayonnements latéraux et axiaux. Le problème pratique d'une antenne à faisceau est examiné. En utilisant la théorie mathématique, il est possible d'améliorer le diagramme de rayonnement et d'appliquer les résultats mathématiques à la théorie des circuits. Par stricte analogie, les théories des diagrammes peuvent être comparées à celles des circuits.

Localisation à grande distance en navigation aérienne. Choix de la longueur d'onde, par P. Hugon (*Navigation*, juillet 1956, p. 203-234).

L'auteur pose le problème de la localisation radioélectrique à grande distance, en navigation aérienne, définit les principaux paramètres qui conditionnent ce problème et rappelle les expériences les plus prolongées qui, effectuées sur des systèmes éprouvés peuvent permettre une certaine extrapolation vers les grandes distances. Il résume quelques notions sur le mécanisme de la propagation directe, de la propagation réfléchie et enfin sur l'accueil du signal composite par un récepteur de radionavigation.

Hyperfréquence et faisceaux hertziens, par H. Gutton (*Electronique*, juillet-août 1956, p. 7-14).

Exposé de la théorie de la transmission par faisceau hertzien. Dans la première partie, l'auteur décrit les moyens utilisés pour l'amplification, la modulation et la démodulation; dans la deuxième partie, il décrit l'ensemble d'un câble hertzien et traite des questions relatives à la qualité de la transmission et aux moyens de la mesurer.

Sur les télécommunications modernes par faisceaux Hertziens, par P. Rivere (*Arts et Métiers*, août 1956, p. 9-18).

L'objet de cet exposé est de faire le point de la technique des transmissions par faisceau hertzien et de montrer à cette occasion :

1° que la France ne doit qu'à ses ingénieurs la création et la mise au point de cette technique;

2° que, lorsque les administrations françaises et l'industrie ont conjointement décidé de faire l'effort

nécessaire d'étude et de développement d'un matériel dont le besoin justifie une série suffisante, les performances d'ensemble de celui-ci et son standing le classent au-dessus des réalisations étrangères et le rendent compétitif dans les transactions avec les autres pays.

Pour illustrer ces affirmations, l'auteur présente trois matériels français de classe, respectivement étudiés avec le concours des Services Techniques de l'Air, de la Guerre et des P. T. T. et qui rivalisent avec les meilleures productions étrangères répondant aux mêmes besoins.

Philosophie des calculateurs automatiques, par L. Bouthillon (*Onde Électrique*, août-septembre 1956, p. 693-708).

Ayant rappelé les définitions et les principales caractéristiques des deux types de grands calculateurs, calculateurs physiques et calculateurs arithmétiques, l'auteur expose les problèmes nouveaux que leur apparition pose à la science mathématique, et les services qu'ils lui rendent; il considère leur rôle dans le développement de l'automatique industrielle; il examine les aspects philosophiques, économiques et sociaux de ces nouvelles techniques et leurs rapports avec la recherche scientifique; il présente enfin des applications autres que mathématiques : joueurs automatiques, machines autoproductrices, machines savantes remplissant les fonctions et imitant le comportement des animaux, machines susceptibles de dressage, traducteurs automatiques, machines à raisonner. Il pose enfin le problème des cerveaux artificiels et des machines à penser, pour conclure que les grands calculateurs et les automates modernes n'apportent rien de fondamentalement nouveau dans la question des rapports de la matière et de l'esprit.

Note sur un nouveau procédé de calcul par courants de haute fréquence, par H. J. Uffler (*Onde Électrique*, août-septembre 1956, p. 770-779).

Un nouveau procédé de calcul utilisant des courants de haute fréquence, est appliqué à la réalisation des opérations algébriques des calculateurs analogiques.

L'auteur étudie ses caractéristiques de simplicité, souplesse, stabilité et précision.

Elles situent les calculateurs analogiques haute fréquence ainsi réalisés, entre les calculateurs analogiques classiques et les calculateurs arithmétiques.

Le chauffage par induction, par J. Reboux (*Ingénieurs et Techniciens*, septembre 1956, p. 91-95, et octobre 1956, p. 45-51, 8 figures).

Du fait de la diversité des applications du chauffage H. F., chaque cas de mise en œuvre de ce procédé nécessite des conditions particulières. L'implantation d'un générateur H. F. dans nombre d'ateliers ou d'usines pose à l'utilisateur une quantité de problèmes.

Le but de l'article est de donner à l'utilisateur éventuel quelques indications destinées à situer convenablement le problème qui lui est posé par rapport aux possibilités du chauffage par induction.

Évolution et perspective de la navigation astronomique maritime, par P. Hugon (*Navigation*, Paris, octobre 1956, p. 342-359).

Après l'étude des moyens actuels mis à la disposition des navigants, l'auteur fait ressortir combien la conduite de la navigation astronomique maritime est encore « nouvelle ». Les progrès de la technique qui jusqu'ici n'ont pu élaborer que des perfectionnements lourds et onéreux sont susceptibles de doter dans l'avenir le navigateur d'équipements automatiques.

Propriétés et applications des thermistances, par J. Bleuze (*Fusées*, octobre 1956, p. 131-142).

Après avoir donné la définition des thermistances, leurs propriétés et leurs caractéristiques, l'auteur envisage leurs conditions d'emploi. Il étudie quelques circuits électriques comportant des thermistances et donne des applications générales (mesure des températures, compensation des dérivés thermiques, temporisation des relais, protection contre les surcharges électriques, etc.). Des applications particulières à l'aéronautique sont également étudiées.

Propriétés et applications des ferrites en U.H.F. effet Faraday, par M. Vassiliev (*Fusées*, octobre 1956, p. 143-150).

Après une courte introduction concernant la structure des ferrites et les bases théoriques expliquant leurs propriétés ferromagnétiques, l'auteur traite le comportement des ferrites aux fréquences élevées. Plus particulièrement, les propriétés des ferrites en U. H. F. sont traitées plus en détails : absorption, effet Faraday, applications.

Les tubes cathodiques à mémoire électrostatique, par Ch. Dufour (*Onde Électrique*, octobre 1956, p. 801-814).

L'auteur indique d'abord la place des différents tubes à mémoire électrostatique dans la classification générale des tubes à image. L'exposé comprend ensuite une première partie générale rappelant les principes d'une mémoire électrostatique ainsi que les processus fondamentaux concernant le dépôt de charges électroniques sur un isolant par un pinceau fin d'électrons.

Dans une seconde partie, les différents types de tubes à mémoire déjà développés sont passés en revue ainsi que leurs principales applications :

— Barrier Grid Storage Tube et Tube à grille de commande par transmission;

— Tube à conductibilité induite pour transformation radar PPI-Télévision;

— Tubes récepteurs à entretien d'image.

Technologie des tubes cathodiques à mémoire électrostatique, par P. Choffart (*Onde Électrique*, octobre 1956, p. 815-821).

L'auteur décrit les différents éléments constituant les tubes à mémoire électrostatique en général : La technologie des canons, leurs performances, leurs facilités d'adaptation à un tube déterminé, sont indiquées.

La technologie des cibles décrites comprend :

— le mode de dépôt du diélectrique, la fabrication des grilles fines (20 mailles au millimètre), l'assemblage des cibles.

L'exposé se termine par l'assemblage général : canon, cible, verrerie et précautions prises pour assurer un bon fonctionnement des tubes.

Le transformateur d'image PPI-Télévision de la S.F.R. par R. Aste (*Onde Électrique*, octobre 1956, p. 822-828).

Après avoir examiné rapidement les servitudes des indicateurs panoramiques actuels et les besoins nécessités par l'exploitation des informations radar, l'auteur décrit un équipement de transformation d'image PPI-Télévision utilisant un tube à conductibilité induite à canons coaxiaux.

Cet équipement, en permettant d'obtenir sur des téléviseurs une carte rémanente, facilite grandement la recherche des échos mobiles.

Un procédé interférométrique de mesure des distances : le radar à modulation de fréquence, par G. Broussaud (*Revue d'Optique*, novembre 1956).

L'auteur montre que le radar à modulation de fréquence peut être considéré comme l'extension à un cas particulier du procédé interférométrique de mesure des longueurs, classique en optique. La modulation de la fréquence de l'onde utilisée apparaît comme un paramètre supplémentaire permettant de s'affranchir de la connaissance complète du train d'interférences.

Dans ce cas la précision de la mesure n'est plus limitée par la longueur d'onde utilisée mais par son analogue correspondant à l'amplitude de la modulation de fréquence $\left(\Delta = \frac{\Delta f}{C}\right)$. Quelques exemples pratiques montrent les possibilités du système.

Caractéristiques des éléments au germanium et au silicium, par M. Dugas (*Métaux, Corrosion, Industries*, novembre 1956, p. 467-469).

Les éléments à semi-conducteurs connaissent un développement de plus en plus grand dans le domaine de l'électronique. Dans de nombreux cas, ils s'avèrent capables de concurrencer les tubes à vide. Ils présentent sur ceux-ci de nombreux avantages : leurs faibles dimensions, le fait qu'ils ne nécessitent pas de chauffage, qu'ils fonctionnent sous faible tension, leur linéarité meilleure et, enfin, leur robustesse.

Parmi les points défavorables aux éléments semi-conducteurs, il faut citer les difficultés à obtenir de hautes fréquences et des puissances élevées. Cependant des progrès sont constamment enregistrés sur ces points.

De plus, les températures de fonctionnement sont assez limitées.

L'auteur examine les principaux éléments au germanium et au silicium actuellement utilisés, leurs caractéristiques et leurs domaines d'applications.

Les antennes, par L. Thourel, 1 volume 16 × 25, Dunod, Paris 1956, 446 pages, 252 figures.

Cet Ouvrage est un complément des traités théoriques, d'un niveau mathématique nécessairement élevé, et qui ne donnent pas toujours des renseignements pratiques. Les développements mathématiques ont été réduits au minimum indispensable à la compréhension du texte et les conclusions des calculs sont complétées par des résultats expérimentaux et par des observations faites au cours de la mise au point du matériel.

L'étude des aériens pour ondes centimétriques et décimétriques a été particulièrement développée, surtout en vue de leur application aux radars et aux câbles hertziens. Les antennes utilisées pour les émissions dirigées sur ondes courtes sont également étudiées en détail, notamment les aériens en losange au sujet desquels de nombreux résultats expérimentaux sont indiqués. Une Annexe importante est consacrée à l'étude des lignes et aux diverses utilisations du diagramme de Smith. Cet Ouvrage qui représente une synthèse des connaissances actuelles sur les aériens, constitue une précieuse documentation.

I
des
de
Fra
tra

INFORMATIONS GÉNÉRALES.

Le *Prix Hughes* a été décerné par l'Académie des Sciences à M. Maurice Ponte, Directeur général de la Compagnie Générale de T. S. F. et de la Société Française Radioélectrique, pour l'ensemble de ses travaux en électronique et en radioélectricité.

Le *Prix du Général Ferrié* a été décerné par l'Académie des Sciences à M. André Leblond, Ingénieur au Département « Recherches Électronique et Atomistique » de la Compagnie Générale de T. S.F., pour ses travaux sur les semi-conducteurs.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER - VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS

150617

Dépôt légal, Imprimeur, 1957, n° 1183

Le Gérant : L. P. BOULANGER.

